Lösungshinweise zu Kapitel 17: Anschauliche Vektorgeometrie

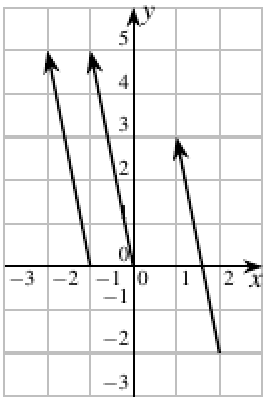
Aufgabe 17.1:

a) Der Vektor $\vec{p}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ beschreibt eine Bewegung im Koordinatensystem, die sich aus den Schritten „zwei links drei oben“ zusammensetzt. Diesem Schema entsprechen genau die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{d}$.

b) Die durch $\vec{p}$ beschriebene Bewegung verschiebt unter anderem den Ursprung auf den Punkt mit den Koordinaten (-2|3) und ist daher der Ortsvektor dieses Punktes. Gesucht ist also ein Pfeil, der im Ursprung beginnt und in (-2|3) endet. Das ist $\vec{a}$.

Aufgabe 17.2:

Hier ist jeder Pfeil eine Lösung, der eine Schrittfolge „einen links fünf oben“ entspricht. Wo er beginnt ist egal. Die folgenden Pfeile sind mögliche Lösungen:



Der hier im Ursprung beginnende Pfeil ist der zusätzlich geforderte Pfeil, der die Lage des Punktes (-1|5) anzeigt soll. Dieser Pfeil ist eine Veranschaulichung der Deutung von $\vec{p}=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ als Ortsvektor des Punktes (-1|5).

Aufgaben 17.3 und 17.4:

Es sei hier auf den Haupttext verwiesen, der vollständige Lösungsschritte angibt.

Aufgabe 17.5:

Die rechnerischen Anforderungen in dieser Aufgabe sind sehr gering. Die Eintragungen müssen so erfolgen, dass sie den Regeln der Vektorrechnung entsprechen.

Aufgabe 17.6:

Im Haupttext finden sich vollständige Lösungswege. Ggf. machen Sie sich eine Zeichnung, um den Aussagen des Lösungstextes folgen zu können. Zur Aussage in der Lösung zur Teilaufgabe b), dass es neben S(3|0) weitere Punkte gibt, die das Dreieck PQR zu einem Parallelogramm ergänzen, sei hier folgender Hinweis gegeben: S und Q befinden sich auf zwei unterschiedlichen Seite der Geraden RP. Nun hat das Dreieck PQR aber drei Seiten und drei Punkte. Zum Beispiel wäre ein ebenfalls geeigneter Punkt T auf der anderen Seite der Geraden PQ als R zu suchen.

Aufgabe 17.7

Auch hier sei darauf hingewiesen, dass eine Zeichnung die ausführlichen Lösungshinweise im Haupttext ergänzt.

Aufgabe 17.8

Die beiden Vektoren einer Geradengleichung lassen sich folgendermaßen interpretieren: Der „Stützvektor“ (also der Vektor ohne Laufvariable λ) ist der Ortsvektor eines Geradenpunktes. Der veranschaulichende Pfeil führt also vom Ursprung zur Geraden. Und der „Richtungsvektor“ (also der Vektor mit Laufvariable) gibt die Richtung der Geraden an. Ein veranschaulichender Pfeil müsste auf der Geraden zu liegen kommen. Betrachten wir die drei Geradengleichungen genauer:

a) Der Stützvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ lässt sich durch einen Pfeil repräsentieren, der vom Ursprung zum Geradenpunkt (2|0) führt. Er ist also in der Tat ein Ortsvektor eines Geradenpunktes und demnach geeignet. Der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ebenfalls passend: Beginnt man einen Pfeil mit der Schrittfolge „zwei links einen oben“ in der Spitze des Stützvektors, dann landet man bei (0|1). Der Pfeil liegt komplett auf der Geraden. g_1 ist also eine zur abgebildeten Geraden passende Geradengleichung.

b) Der Stützvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist der Ortsvektor des Punktes (-2|3). Dieser liegt aber nicht auf der Geraden, sondern zu weit oben. Der Geradenpunkt mit derselben x-Koordinate liegt bei (-2|2). Demnach passt die Geradengleichung g_2 nicht zur abgebildeten Geraden. Auch der Richtungsvektor ist ungeeignet: In das Koordinatensystem als Pfeil dargestellt erkennt man eine steigende Richtung, keine fallende.

c) Der Stützvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist der Ortsvektor des Punktes (4|-1). Dieser liegt auf der Geraden. Auch der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ passt: Beginnt man einen entsprechenden Pfeil in (0|4), dann endet dieser in (4|-1). Der Pfeil liegt komplett auf der Geraden. Auch g_3 ist eine passende Geradengleichung.

Nur g_2 passt nicht zur abgebildeten Geraden. Wie oben dargelegt, reichen zwei kleine Änderungen, um die Geradengleichung passend zu machen: Man ersetze die zweite Komponente im Stützvektor 3 durch 2, und man ersetze die erste Komponente im Richtungsvektor 2 in -2.

Aufgabe 17.9

Die im Haupttext angegebenen Gleichungen sind nur mögliche Lösungen. Es sind weitere möglich:

Als Stützvektor kann der Ortsvektor zu jedem Geraden- bzw. Ebenenpunkt genommen werden. Für g_{AB} und g_{BC} wurde im Haupttext der Ortsvektor zum Punkt B, also $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ gewählt. Als Stützvektor für die Parametergleichung g_{AB} könnte beispielsweise auch der Ortsvektor zum Punkt A, also $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gewählt werden.

Die Wahl des bzw. der Richtungsvektoren ist unabhängig vom gewählten Stützvektor. Für g_{AB} wurde der Verbindungsvektor von B nach A gewählt, also $-\vec{b}+\vec{a}=-\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Genauso gut hätte auch der umgekehrt orientierte Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ oder ein kürzerer, aber paralleler Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ angegeben werden können.

Beim Aufstellen einer Ebenengleichung sind aus drei angegeben Punkten zwei Richtungsvektoren zu konstruieren. Für E_{ABC} wurden die Verbindungsvektoren von A nach B und von A nach C gewählt. Genauso gut ist als Richtungsvektor jeder Verbindungsvektor zwischen zwei der drei Punkte A, B und C geeignet. Wählt man anders als in der angegebenen Lösung als Stützvektor den Ortsvektor zu C und als Richtungsvektoren die Verbindungsvektoren von B zu C und von A zu C, dann lautet die Ebenengleichung $E_{ABC}:\vec{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.