Ergänzung zu Kapitel 17: Koordinatengleichungen von Geraden und Ebenen

Sie haben im Kapitel 17 die sogenannten Parametergleichungen von Geraden und Ebenen kennen gelernt. Für diese Parametergleichungen werden Vektoren verwendet. Insbesondere wird ein Punkt der dargestellten Geraden oder Ebene nicht in Form seiner Punktkoordinaten angegeben, sondern durch seinen Ortsvektor. (Wobei die Komponenten des Ortsvektors mit den Koordinaten des Punktes identisch sind.)

Neben der Parametergleichung gibt es mit der Koordinatengleichung eine weitere Möglichkeit, Geraden und Ebenen mathematisch zu erfassen. Eine Gleichung wird dann Koordinatengleichung genannt, wenn man ihre Lösungen als Koordinaten von Punkten betrachten will. Koordinatengleichungen – oder besser: Koordinatendarstellungen – sind also Darstellungen geometrischer Objekte wie etwa Geraden oder Ebenen in Form von Gleichungen. Dabei ist man etwas eingeschränkt: Koordinatendarstellungen für Geraden gibt es nur im zweidimensionalen Koordinatensystem und für Ebenen nur im dreidimensionalen Koordinatensystem.

Koordinatengleichungen von Geraden im zweidimensionalen Raum

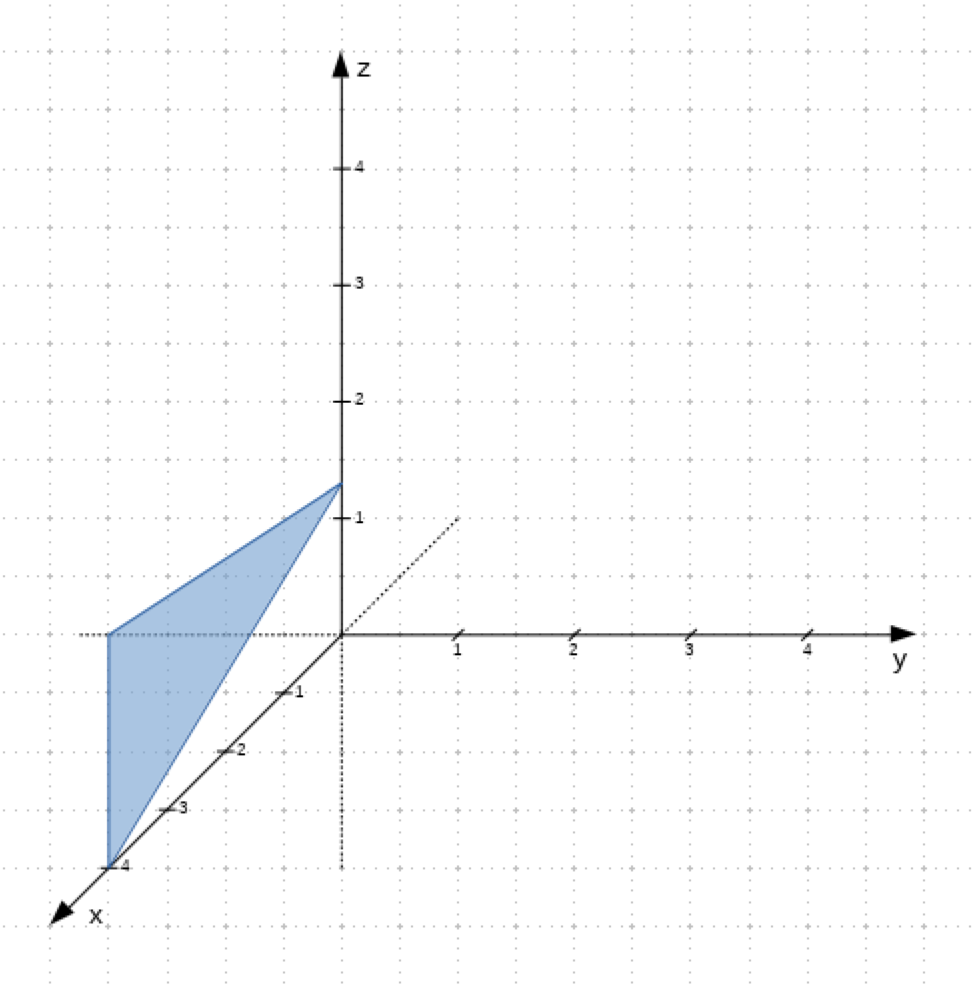
Koordinatengleichungen von Geraden im zweidimensionalen Raum kennen Sie schon aus Kapitel 15.1: Es sind die linearen Gleichungen $ax + by + c = 0$. Solche Gleichungen haben unendlich viele Lösungspaare $(x;y)$, die – wenn man sie in einem zweidimensionalen Koordinatensystem als Punkte markiert – eine Gerade bilden. Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung ist also geometrisch gesehen eine Gerade. Umgekehrt lässt sich jede Gerade in einem zweidimensionalen Koordinatensystem auch als lineare Gleichung darstellen.

Koordinatengleichungen von Ebenen im dreidimensionalen Raum

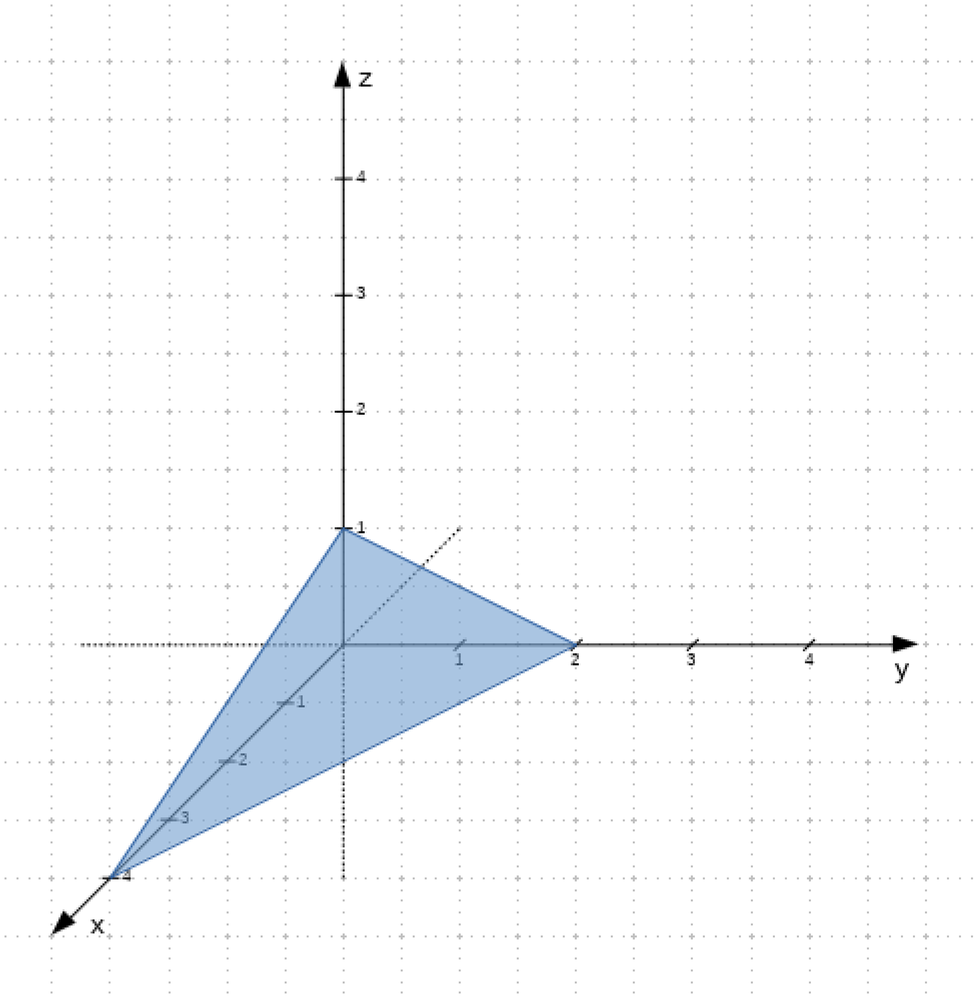
Koordinatengleichungen von Ebenen im dreidimensionalen Raum sind lineare Gleichungen der Form $ax + by + cz + d = 0$. Auch diese Gleichungen haben unendlich viele Lösungen, und zwar der Form $(x;y;z)$, die – wenn man sie in einem dreidimensionalen Koordinatensystem als Punkte markiert – eine Ebene bilden. Jede Gleichung der angegebenen Form ist geometrisch gesehen eine Ebene, und umgekehrt lässt sich jede Ebene im dreidimensionalen Koordinatensystem als lineare Gleichung über die drei Koordinatenvariablen x, y und z darstellen.

Beispiel: Stelle die Gleichung x – 2y + 3z – 4 = 0 geometrisch dar.

Wir wissen, dass die Lösungsmenge der Gleichung eine Ebene ist. Die Position einer Ebene ist durch drei Punkte festgelegt. Es genügt also, die Achsenabschnitte der Ebene auf den drei Koordinatenachsen zu markieren und zu verbinden. Der Achsenabschnitt auf der x-Achse ist 4, denn die zugehörigen Punktkoordinaten (4|0|0) erfüllen die Gleichung. Ebenso ist -2 der y-Achsenabschnitt und 4/3 der z-Achsenabschnitt, denn (0|-2|0) bzw. (0|0|4/3) erfüllen die Gleichung. Die drei Abschnitte werden auf den Achsen markiert, und die Ebene in Form eines dreieckigen Teilausschnitts dargestellt:



Beispiel: Stelle die folgende Ebene als Koordinatengleichung dar:



Die Abschnitte für die x-, y- und z-Achse lauten respektive 4, 2 und 1. Es müssen also die Wertetripel (4;0;0), (0;2;0) und (0;0;1) Lösungen der gesuchten Gleichung sein. Die folgende ist eine solche, wie man durch Einsetzen schnell feststellt:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}-1=0$$

„Schöner“ sieht die Gleichung aus, wenn man sie mit 4 multipliziert:

$$x+2y+4z-4=0$$

Die Multiplikation einer Gleichung mit 4 ist eine Äquivalenzumformung. Das heißt, die Lösungsmenge der Gleichung ändert sich nicht. Beide Gleichungen stellen also die gezeigte Ebene dar.

Beispiel: Man gebe eine Parameterdarstellung der durch x – 2y + 4z – 8 = 0 gegebenen Ebene an.

Die Ebene schneidet in den drei Punkten (8|0|0), (0|-4|0) und (0|0|2) die Achsen des Koordinatensystems. Wir wählen den Ortsvektor eines der drei Punkte als Stützvektor der Parametergleichung und zwei Verbindungsvektoren zwischen den drei Punkten als Richtungsvektoren und erhalten

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}8\\4\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$$

Beispiel: Man gebe eine Koordinatendarstellung der durch $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

gegebenen Ebene.

Wieder ermittelt man die Achsenabschnitte der Ebene. Das sind die Punkte, in der immer zwei der drei Koordinaten gleich null sind. Zur Berechnung des x-Achsenabschnitts ist das LGS

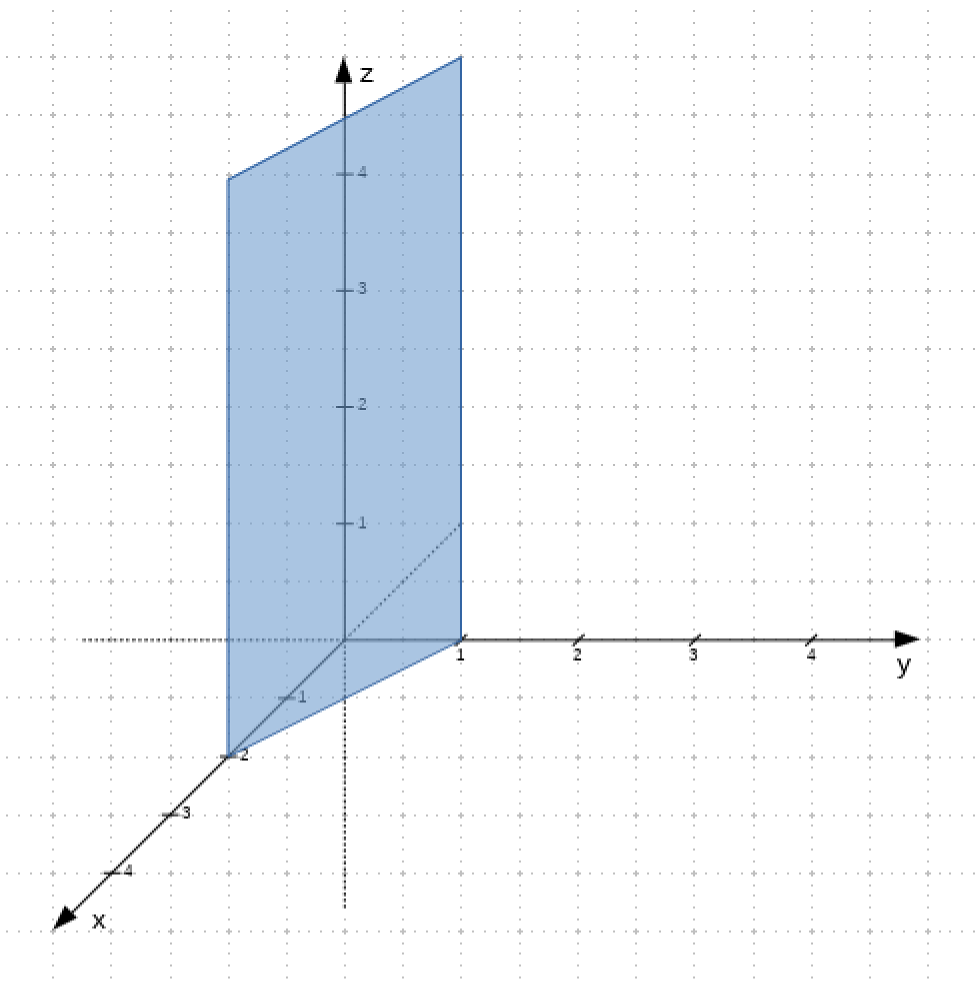
$$\begin{aligned} x &= 1 + \lambda\cdot 1 + \mu\cdot 0\\ 0 &= 2 + \lambda\cdot 2 + \mu\cdot 1\\ 0 &= 0 + \lambda\cdot 1 + \mu\cdot 1 \end{aligned}$$

zu lösen. Man erhält λ = -2 und μ = 2 und somit für x = -1. Analog erhält man für den y-Achsenabschnitt 1 (mit λ = -1 und μ = 1) und für den z-Achsenabschnitt -1 (mit λ = -1 und μ = 0). Die Koordinatengleichung lautet also

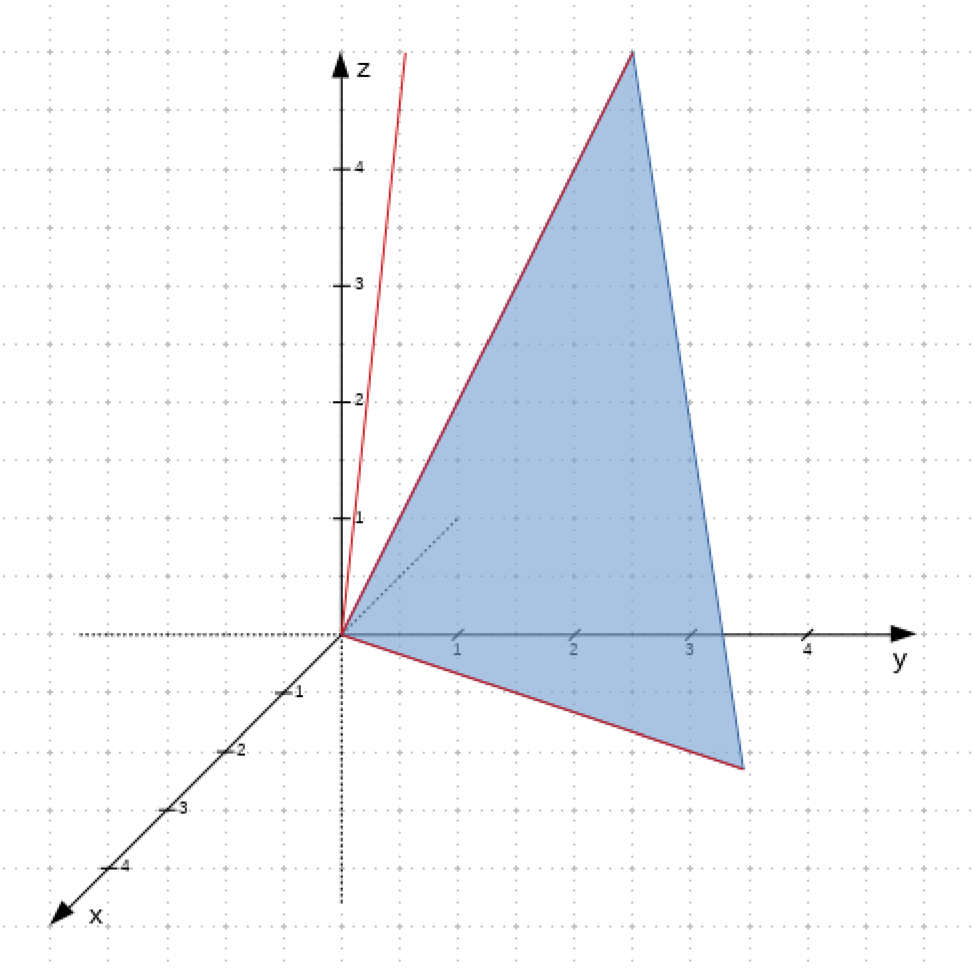
$$-x + y - z - 1 = 0$$

Sonderfälle:

Die Ebene ist etwa parallel zur x-y-Ebene. Sie hat also nur einen z-Achsenabschnitt, aber keinen x- und keinen y-Achsenabschnitt. Die zugehörige Koordinatengleichung lautet einfach $z - d = 0$, wobei d der z-Achsenabschnitt wäre. Analoges gilt für Ebenen, die parallel zu anderen Koordinatenebenen oder -achsen liegen. Die folgende Abbildung zeigt zum Beispiel die zur z-Achse parallele Ebene $x - 2y - 2 = 0$ mit dem x-Achsenabschnitt 2 und dem y-Achsenabschnitt 1. Weil sie parallel zu einer Achse ist wird sie ausschnittsweise als perspektivisches Rechteck dargestellt.



Ein anderer Sonderfall liegt vor, wenn die Ebene durch den Ursprung verläuft. Dann hat die Ebene keine Achsenabschnitte mehr, Allerdings lassen sich die weiterhin ermittelbarn Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen verwenden, an denen man sich orientieren kann. Zum Beispiel verläuft die Ebene $4x - 2y + z = 0$ durch den Ursprung, denn (0;0;0) ist eine Lösung. Die Gleichung der Schnittgeraden mit der x-y-Ebene ist der Teil der Ebenengleichung, die nur über den Zusammenhang von x und y Aussagen trifft, nämlich 4x-2y = 0 bzw. äquivalent: y = 2x. Die Gleichung der Schnittgeraden mit der y-z-Ebene lautet analog -2y + z = 0 bzw. z = 2y, und die Gleichung der Schnittgeraden mit der x-z-Ebene lautet 4x+z=0 bzw. x = -1/4z. Mit dieser Information kann man die Ebene zeichnen, indem man die Schnittgeraden verbindet:



Nur der Teil der Ebene ist gezeigt, der sich im positiven Bereich aller drei Achsen befindet. Hierzu sind nur zwei der drei Schnittebenen notwendig. Die dritte ist zur Kontrolle ebenfalls gezeichnet und markiert den Bereich, in dem die Ebene „hinter der y-z-Ebene“ die x-z-Ebene schneidet.