Lösungshinweise zu Kapitel 16: Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 16.1:

a)

$$\begin{array}{r|l} \text{I} & 2x + 3y = 8 \\ \text{II} & x - y = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{I := I} & 2x + 3y = 8 \\ \text{II := I-2II} & 5y = 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{I := I} & 2x + 3y = 8 \\ \text{II := 1/5 II} & y = 2 \end{array}$$

y=2 in I eingesetzt ergibt 2x + 6 = 8 und damit x = 1.

b)

$$\begin{array}{r|l} \text{I} & x - 2y = -7 \\ \text{II} & 2x + 3y = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{I := I} & x - 2y = -7 \\ \text{II := 2I – II} & -7y = -14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{I := I} & x - 2y = -7 \\ \text{II := -1/7 II} & y = 2 \end{array}$$

y=2 in I eingesetzt ergibt x - 4 = -7 und damit x = -3.

c)

$$\begin{array}{r|l} \text{I} & 5x + y + 2z = 3 \\ \text{II} & -2x \quad + z = -1 \\ \text{III} & x + y + z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{I := III} & x + y + z = 0 \\ \text{II := II} & -2x \quad + z = -1 \\ \text{III := I} & 5x + y + 2z = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{I := I} & x + y + z = 0 \\ \text{II := 2I+II} & 2y + 3z = -1 \\ \text{III := 5I-III} & 4y + 3z = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{I := I} & x + y + z = 0 \\ \text{II := II} & 2y + 3z = -1 \\ \text{III := 2II-III} & 3z = 1 \end{array}$$

I := I	x + y + z = 0
II := II	2y + 3z = -1
III := 1/3 III	z = 1/3

$z=\frac{1}{3}$ in II eingesetzt ergibt 2y + 1 = -1 und damit y = -1.

$z=\frac{1}{3}$ und y = -1 in I eingesetzt ergibt $x-1+\frac{1}{3}=0$ und damit $x=\frac{2}{3}$.

d)

I	x + y + z = 4
II	x − y + z = 0
III	2x + y - 2z = -6

I := I	x + y + z = 4
II := I-II	2y = 4
III := 2I-III	y + 4z = 14

I := I	x + y + z = 4
II := $\frac{1}{2}$II	y = 2
III := III	y + 4z = 14

Wir brechen vor Erreichen der Dreiecksform ab, denn II enthält schon die erste Teillösung, die durch Einsetzen in III und I zu den Lösungen für z und x führt:

y = 2 in III eingesetzt ergibt 2 + 4z = 14 und damit z = 3.
y = 2 und z = 3 in I eingesetzt ergibt x +2 + 3 = 4 und damit x = -1.

Hinweis: Genau genommen lag oben schon eine Dreiecksform vor. Denn das Kommutativgesetz der Addition erlaubt es, die Teilterme für y und z mitsamt ihrer Komponenten zu vertauschen, so dass die letzte Zeile auch so hätte umgeschrieben werden können:

I := I	*x + z + y = 4*
II := III	*4z + y = 14*
III := II	*y = 2*

Aufgabe 16.2:

a)

I	2x + 3y = b
II	x + ay = 4

I := I	2x + 3y = b
II := I-2II	(3-2a)y = b-8

Aus Gleichung II werden nun mittels a und b die drei verschiedenen Fälle konstruiert:

- Unendlich viele Lösungen hat das Gleichungssystem dann, wenn man die Gleichung III in die Form 0 = 0 bringt. Das ist der Fall, wenn 3-2a= 0 und b-8 = 0 ist. Nach a bzw. b aufgelöst lauten die Bedingungen $a=\frac{3}{2}$ bzw. b=8. In diesem Fall kann y frei gewählt werden, und für jedes dieser y ist $2x+3y=8$ bzw. $x=4-\frac{3}{2}y$.

- Unlösbar ist das Gleichungssystem dann, wenn die Gleichung II eine falsche Aussage zeigt. Das ist der Fall, wenn der zu y gehörige Koeffizient den Wert Null hat, die rechte Seite ungleich Null ist, denn kein Wert für y könnte diese Gleichung lösen. Hierzu wäre $b\neq 8$ und $a=\frac{3}{2}$ zu wählen.

- Genau eine Lösung hat das Gleichungssystem in allen anderen Fällen. Dies ist mit $a\neq\frac{3}{2}$ der Fall. Man erhält durch Umformen aus Gleichung II für y den Wert $\frac{b-8}{3-2a}$. In Gleichung I eingesetzt erhält man $2x+3\cdot\frac{b-8}{3-2a}=b$ und nach x umgeformt $x=\frac{b}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{b-8}{3-2a}$.

b)

I	x + y = k
II	2x + 3y = 6

I := I	x + y = k
II := -2I + II	y = 6-2k

Aus Gleichung II werden nun mittels k die drei verschiedenen Fälle konstruiert:

- Unendlich viele Lösungen hat das Gleichungssystem dann, wenn man die Gleichung III in die Form 0 = 0 bringt. Das geht hier nicht.

- Unlösbar ist das Gleichungssystem dann, wenn die Gleichung II eine falsche Aussage zeigt. Auch das ist hier nicht konstruierbar.

- Genau eine Lösung hat das Gleichungssystem in allen anderen Fällen. Das ist für alle Fälle von k der Fall. Den Wert für y zeigt die Gleichung II: y = 6-2k. Dies eingesetzt in Gleichung I ergibt x + 6-2k = k bzw. x = 3k – 6.

c)

$$\begin{array}{r|c} \text{I} & x + y - z = a \\ \text{II} & -x - y + z = 7 \\ \text{III} & y + z = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c} \text{I} := \text{I} & x + y - z = a \\ \text{II} := \text{I+II} & 0 = a+7 \\ \text{III} := \text{III} & y + z = 3 \end{array}$$

Man betrachte Gleichung II: Ist $a \neq -7$, dann entsteht eine falsche Aussage. In diesem Fall ist das Gleichungssystem nicht lösbar. Wenn a = -7 ist, dann hat die Gleichung II die Form 0 = 0. Sie ist damit wahr, und das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen: Bei frei wählbarem z erhält man aus Gleichung III durch Umformen y = -z + 3 und aus Gleichung I durch Einsetzen und Vereinfachen x = 2z – 10.

d)

$$\begin{array}{r|c} \text{I} & x + 2y - z = s \\ \text{II} & x + y \quad = 1 \\ \text{III} & y - z = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c} \text{I} := \text{I} & x + 2y - z = s \\ \text{II} := \text{I-II} & y - z = s - 1 \\ \text{III} := \text{III} & y - z = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c} \text{I} := \text{I} & x + 2y - z = s \\ \text{II} := \text{II} & y - z = s - 1 \\ \text{III} := \text{II-III} & 0 = s - 3 \end{array}$$

Man betrachte Gleichung III: Ist $s \neq 3$, dann entsteht eine falsche Aussage. In diesem Fall ist das Gleichungssystem nicht lösbar. Wenn s = 3 ist, dann hat die Gleichung III die Form 0 = 0. Sie ist damit wahr, und das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen: Bei frei wählbarem z erhält man aus Gleichung II durch Umformen y = 2 + z, und aus I durch Einsetzen und Vereinfachen x = -z-1.

Aufgabe 16.3:

a) Man identifiziere jeweils zunächst den Fall, in dem das LSG nicht lösbar ist:

i) Eliminiert man den y-Term, indem man in das Kästchen eine Null einträgt, dann enthält das LGS die widersprüchlichen Gleichungen -x = 1 und x = 1. Das LGS ist so nicht lösbar. Enthält das Kästchen eine Zahl $a \neq 0$, dann hat das LGS genau eine Lösung. Denn aus

Gleichung I erhält man x = -1 und durch Einsetzen in Gleichung II erhält man -1 + ay = 1 bzw. $y=\frac{2}{a}$.

ii) Mit der zweiten Gleichung lassen sich die drei bekannten Fälle konstruieren:

- Unendlich viele Lösungen hat das Gleichungssystem dann, wenn es nach Umformen eine Gleichung der Form 0 = 0 enthält. Das ist dann der Fall, wenn die zweite Gleichung mit der ersten identisch ist. Dieser Fall liegt vor, wenn im ersten Kästchen 2 und im zweiten Kästchen 3 steht. Für ein frei wählbares y hätte x den Wert 3-2y.

- Unlösbar ist das Gleichungssystem dann, wenn es nach Umformen eine unlösbare Gleichung enthält. Das ist dann der Fall, wenn die linke Seite der zweiten Gleichung mit der linken Seite der ersten Gleichung identisch ist, die rechten Seiten aber verschieden. Dieser Fall liegt vor, wenn im ersten Kästchen eine 2 eingetragen wird und im zweiten Kästchen eine Zahl ungleich 3 steht.

- Genau eine Lösung hat das Gleichungssystem in allen anderen Fällen. Das ist dann der Fall, wenn im ersten Kästchen eine Zahl ungleich 2 steht:

$$\begin{array}{r|c} \text{I} & x + 2y = 3 \\ \text{II} & x + ay = b \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c} \text{I} := \text{I} & x + 2y = 3 \\ \text{II} := \text{I} - \text{II} & (2-a)y = 3-b \end{array}$$

Aus Gleichung II erhält man $y=\frac{3-b}{2-a}$ und durch Einsetzen in Gleichung I $x=3-2\frac{3-b}{2-a}$.

b) Dies ist das zweite Gleichungssystem, wie oben schon gezeigt.

Aufgabe 16.4:

Die Aussagen a, b und d sind zulässig. Zur Begründung verweisen wir auf den Haupttext im Buch. Nicht zulässig dagegen sind die Aussagen c) und e). Zur Begründung geben wir Gegenbeispiele:

Zu c): Angenommen es wäre zulässig, beide Seiten einer Gleichung in einem LGS zu quadrieren. Dann wäre das insbesondere bei dem folgenden LGS zulässig, das offensichtlich das Wertepaar (1,-1) als Lösung hat.

$$\begin{array}{r|l} \text{I} & x = 1 \\ \text{II} & y = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{I} := \text{I} & x = 1 \\ \text{II} := \text{II}^2 & y^2 = 1 \end{array}$$

Das resultierende Gleichungssystem ist erstens nicht mehr linear, und zweitens hat es nun zwei Wertepaare als Lösung, nämlich (1;-1) und (1;1).

Zu e): Angenommen es wäre zulässig, eine Gleichung durch eine andere Gleichung des Gleichungssystems zu ersetzen. Dann wäre das insbesondere bei dem oben betrachteten Gleichungssystem zulässig:

$$\begin{array}{r|l} \text{I} & x = 1 \\ \text{II} & y = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{I} := \text{I} & x = 1 \\ \text{II} := \text{I} & x = 1 \end{array}$$

Das resultierende Gleichungssystem hat nun nicht mehr nur das eine Wertepaar (1;-1) als Lösung, sondern unendlich viele Wertepaare der Form (1;y).

Merke aber: Eine Gleichung durch eine andere Gleichung des LGS auszutauschen ist nicht zulässig. Zulässig ist es aber, zwei Gleichungen zu vertauschen, zum Beispiel so:

$$\begin{array}{r|l} I & x = 1 \\ II & y = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} I := II & y = -1 \\ II := I & x = 1 \end{array}$$