Ergänzung zu Kapitel 16: Das Gaußsche Eliminationsverfahren in reduzierter Form

Das im Haupttext vorgestellte systematische Verfahren zur Lösung von Linearen Gleichungssystemen wird dem Mathematiker Carl Friedrich Gauß zugeschrieben. Variationen dieses Verfahrens sind allerdings schon seit vielen Jahrhunderten bekannt. Ziel dieses Verfahrens ist, vermittels Äquivalenzumformungen das LGS in eine sogenannte „Dreiecksform" (auch: „Stufenform") zu bringen, so dass der Wert einer Variablen abgelesen werden kann und durch sukzessives Einsetzen die Werte der übrigen Variablen berechnet werden können.

Als Algorithmus bietet das Gaußsche Eliminationsverfahren eine Rechenprozedur, mittels derer man ohne viel Nachdenken immer zur Lösung gelangt (auch wenn sie nicht immer die effizienteste ist). Weiter im Aufwand reduzieren kann man das Verfahren, indem man den Schreibaufwand verringert. Anhand der Aufgabe 16.2 aus dem Haupttext soll das im Folgenden demonstriert werden. Links ist die dort eingeführte Schreibweise gezeigt, rechts dieselbe Berechnung in reduzierter Form:

$$
\begin{array}{r|rcrcrcr}
I & 2x & + & y & + & 2z & = & 1\\
II & 4x & - & y & + & 2z & = & -3\\
III & x & - & y & - & z & = & 0
\end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 2 & 1\\ 4 & -1 & 2 & -3\\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\begin{array}{r|rcrcrcr}
I:=I & 2x & + & y & + & 2z & = & 1\\
II:=2I-II & & & 3y & + & 2z & = & 5\\
III:=I-2III & & & 3y & + & 4z & = & 1
\end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 2 & 1\\ & 3 & 2 & 5\\ & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\begin{array}{r|rcrcrcr}
I:=I & 2x & + & y & + & 2z & = & 1\\
II:=II & & & 3y & + & 2z & = & 5\\
III:=II-III & & & & & -2z & = & 4
\end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 2 & 1\\ & 3 & 2 & 5\\ & & -2 & 4 \end{array}\right)
$$

$$
\begin{array}{r|rcrcrcr}
I:=I & 2x & + & y & + & 2z & = & 1\\
II:=II & & & 3y & + & 2z & = & 5\\
III:=-\frac{1}{2}III & & & & & z & = & -2
\end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 2 & 1\\ & 3 & 2 & 5\\ & & 1 & -2 \end{array}\right)
$$

In der reduzierten Form sind sämtliche Rechenzeichen und insbesondere die Variablen verschwunden. Weil man ja auch nur mit den Koeffizienten rechnet, kann man alle anderen Zeichen des LGS weglassen, wobei die Subtraktionszeichen zu Vorzeichen geändert werden. Trotzdem ist wichtig, zu welcher Variablen ein Koeffizient gehört. Diese Information kann man an der Position des Koeffizienten in der reduzierten Form erkennen. Eine rechteckige Zusammenstellung von Zahlen, in der die Position einer Zahl wichtige Informationen enthält, nennt man „Matrix". Zum Beispiel ist ein Vektor oder die Angabe von Koordinaten eines Punktes eine Matrix, die in diesen beiden Fällen aus nur einer Spalte bzw. Zeile besteht. Matrizen werden durch runde Klammern begrenzt. Dies ist bekanntermaßen bei Vektoren und Koordinatendarstellungen der Fall, und aus diesem Grund auch hier. Der senkrechte Strich gehört nicht zur Matrizendarstellung. Er wird deshalb verwendet, um die ursprüngliche Position des Gleichheitszeichens zu kennzeichnen, und könnte im Grunde auch weggelassen werden.