Lösungshinweise zu Kapitel 15: Orientieren im Raum

Aufgabe 15.1: Natürlich kann man jede der durch die Gleichungen gegebenen Gleichungen durch Angabe zweier Geradenpunkte zeichnen und kommt so zu den korrekten Zuordnungen. Allerdings kommt man durch Beachtung der Symmetrien der gezeigten Geradenkonfiguration schneller zur Lösung:

Zwei der Geraden durchlaufen den Ursprung. Die zugehörigen Geraden sind a) und f), was man durch Einsetzen von x=0 und y=0 schnell bestätigen kann. Nur a) durchläuft (3|2), was man wiederum durch Einsetzen bestätigt. Es gehören also a) zu 5. und f) zu 6.

Bei Einsetzen von x=0 erhält man die y-Achsenabschnitte 3 für b) und e) sowie -3 für c) und d). Bei Einsetzen von y=0 erhält man als x-Achsenabschnitte 2 für b) und d) sowie -2 für c) und e). Es gehören also b) zu 4., c) zu 2., d) zu 3. und e) zu 1.

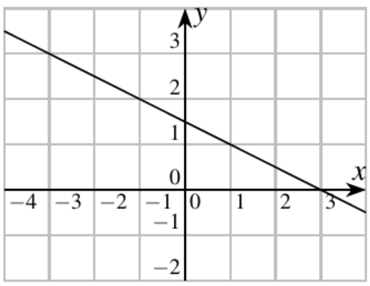
Aufgabe 15.2: Einsetzen von x=0 und y=0 liefert für jede Gleichung ihren y-Achsenabschnitt bzw. x-Achsenabschnitt:

Für a) erhält man den y-Achsenabschnitt $\frac{3}{2}$ bzw. den x-Achsenabschnitt 3.

Für b) erhält man den y-Achsenabschnitt $\frac{3}{2}$ bzw. den x-Achsenabschnitt 3.

Und auch für c) erhält man den y-Achsenabschnitt $\frac{3}{2}$ bzw. den x-Achsenabschnitt 3.

Spätestens die Zeichnung zeigt, dass alle drei Geraden zwar nicht identisch, aber doch äquivalent sind:



In der Tat lassen sich die Gleichungen durch Äquivalenzumformungen ineinander überführen. Und zwar ist die Gleichung a) das Dreifache der Gleichung b) und Gleichung c) das Doppelte der Gleichung b).

Aufgabe 15.3 Es reicht zunächst als Hinweis die Angabe der Achsenabschnitte für jede Gleichung.

Für a) erhält man den y-Achsenabschnitt -2 bzw. den x-Achsenabschnitt 3.

Für b) erhält man den y-Achsenabschnitt -5 bzw. den x-Achsenabschnitt 3.

Für c) erhält man den y-Achsenabschnitt $\frac{1}{2}$ bzw. den x-Achsenabschnitt -1.

Für d) erhält man den y-Achsenabschnitt -4 bzw. keinen x-Achsenabschnitt.

Für e) erhält man keinen y-Achsenabschnitt bzw. den x-Achsenabschnitt 5.

Für f) erhält man den y-Achsenabschnitt 1 bzw. den x-Achsenabschnitt $-\frac{1}{2}$.

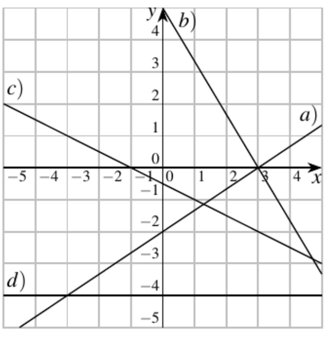
Für g) erhält man den y-Achsenabschnitt $\frac{1}{3}$ bzw. den x-Achsenabschnitt $\frac{1}{2}$.

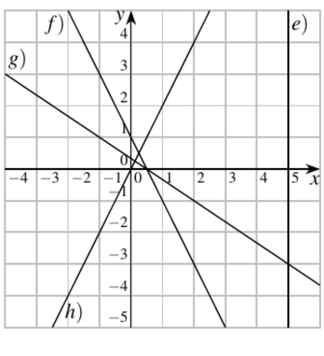
Für h) erhält man den y-Achsenabschnitt 0 bzw. den x-Achsenabschnitt 0.

Die Zeichnung ergibt sich als Verbindungsgerade beider Abschnittsmarkierungen. Allerdings liegen im Fall d) und e) keine zwei Achsenabschnitte vor, und in h) fallen beide zusammen. Weil d) keinen x-Achsenabschnitt hat, muss die Gerade parallel zu x-Achse gezeichnet werden. Und weil e) keinen y-Achsenabschnitt hat, liegt die zugehörige Gerade parallel zu y-Achse. Im Fall h) wäre zunächst zu bemerken, dass die scheinbar quadratische Gleichung eigentlich linear ist, denn es ist

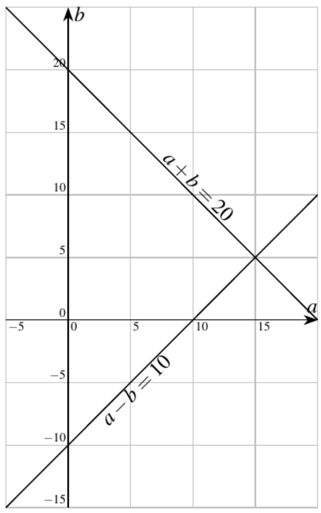
$$(x-1)^2=x^2+y+1 \Leftrightarrow x^2-2x+1=x^2+y+1 \Leftrightarrow -2x=y.$$

Es muss also eine Gerade gezeichnet werden, wie sie in den Lösungen auch gezeigt wird. Insbesondere erkennt man, dass es eine Ursprungsgerade mit der Steigung -2 ist.





Aufgabe 15.4 Die erste Bedingung in eine Gleichung übersetzt lautet a+b=20, die zweite a-b=10. Die Lösungsmenge der ersten Gleichung im Koordinatensystem mit der horizontalen a-Achse und der vertikalen b-Achse ist eine Gerade durch (20|0) und (0|20). Die Lösungsmenge der zweiten Gleichung ist eine Gerade durch (10|0) und (0|-10).



Der Schnittpunkt hat die Koordinaten (15|5). Es ist also a=15 und b=5.

Aufgabe 15.5 g verläuft durch die Punkte (0|3) und (4|0). Der y-Achsenabschnitt lautet also 3. Die Steigung wird als Quotient der Differenzen beider y- bzw. x-Koordinaten berechnet, also $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-0}{0-3}=\frac{4}{-3}=-\frac{4}{3}$. Das negative Vorzeichen wird durch den visuellen Eindruck bestätigt: Die Gerade fällt, die Steigung muss also negativ sein. Analog lassen sich die Geradengleichungen der beiden anderen Geraden bestimmen.

Alternativ sei hier ein Lösungsverfahren angedeutet, das die Angabe einer korrekten Geradengleichung mittels Ablesen beider Achsenabschnitte erlaubt: g verläuft durch die Punkte (0|3) und (4|0). Gesucht ist eine Gleichung, die diese Wertepaare als Lösungen hat. Zum Beispiel ist dies bei $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ der Fall. Schöner sieht die Gleichung aus, die sich hieraus durch Multiplikation mit dem kleinsten gemeinsamen Nenner beider Brüche ergibt und – weil dies eine Äquivalenzumformung ist – dieselbe Lösungsmenge hat, nämlich 3x + 4y = 12. Analog erhält man für f die Gleichung x – 2y = 2 und für h die Gleichung 2x – y = -2.

Aufgabe 15.6 Hier sind Sie explizit aufgefordert, die Symmetrie der Konfiguration zu nutzen. Das ist deshalb sinnvoll, da für keine Gerade die Achsenabschnitte direkt ablesbar sind bzw. diese sogar zusammenfallen.

Am Einfachsten sind wohl die Gleichungen der Geraden e und f formulierbar. Beide weisen keinen y-Achsenabschnitt auf und haben eine Steigung von $\frac{2}{3}$ bzw. $-\frac{2}{3}$. Für e erhalten wir also $y=\frac{2}{3}x$ bzw. $2x-3y=0$, für f analog $2x+3y=0$.

Die weiteren Geradengleichungen entwickeln wir nun aus denen von e und f:

Die Gerade c zum Beispiel weist dieselbe Steigung wie e auf, verläuft aber durch den Punkt (-2|3). Die Koeffizienten von x und y in der Gleichung $2x-3y=0$ von e enthalten die Information über die Steigung der Geraden. Diese bleiben in der Gleichung von c erhalten, allerdings braucht diese zusätzlich eine korrigierende Konstante: Weil das Wertepaar (-2;3) die Gleichung von c erfüllen muss, lautet diese $2x-3y=-13$, denn es ist 2·(-2) – 3·3 = -13. Analog erhält man für die Gerade b, die durch den Punkt (2|-3) verläuft, die Gleichung $2x-3y=13$.

Für a und d erhält man ausgehend von f: $2x+3y=0$ und unter Berücksichtigung der Tatsache, dass sie durch die Punkte (2|3) bzw. (-2|-3) verlaufen, die Gleichungen $2x+3y=13$ bzw. $2x+3y=-13$.

Aufgabe 15.7

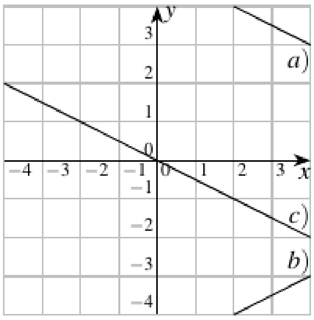
a) Die gesuchte Gleichung muss die Wertepaare (-2;0) und (0;3) als Lösungen haben. Eine solche Gleichung lautet $-\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, woraus sich durch Äquivalenzumformung die „schönere" Darstellung $3x-2y=-6$ entwickeln lässt.

b) Aus den Differenzen der angegebenen Punktkoordinaten lässt sich die Steigung der Geraden ermitteln: $\frac{1-(-4)}{-2-(-3)}=\frac{5}{1}=5$. Die zur gesuchten Geraden parallele Ursprungsgerade hat also die Gleichung $y=5x$ bzw. $5x-y=0$. Die gesuchte Gleichung hat dieselben Steigung, muss aber auch die Lösung (-2;1) haben. Weil 5·(-2) – 1 = -11 ist, lautet die gesuchte Gleichung $5x-y=-11$.

c) Die x-Koordinaten beider angegebenen Geradenpunkte sind beide gleich, die Gerade ist also parallel zur y-Achse. Die x-Koordinaten aller Geradenpunkte haben den Wert 3, deshalb lautet die Geradengleichung x=3.

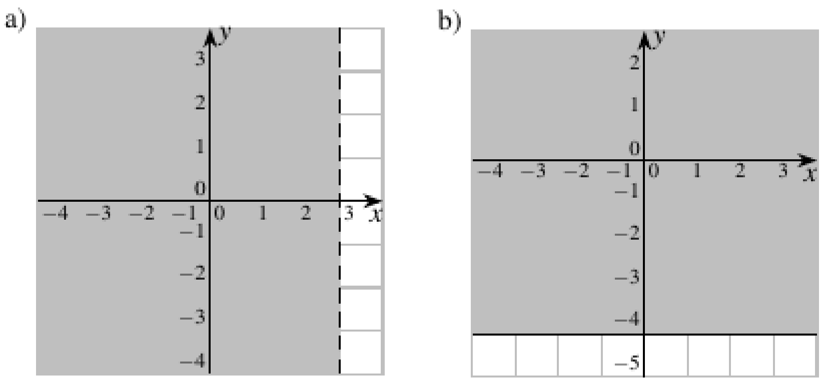
Aufgabe 15.8 Wegen $x+2y=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x$ handelt es sich bei c um eine Ursprungsgerade mit der Steigung $\frac{1}{2}$, die sich mit diesen Angaben zeichnen lässt. Weil die Gleichung a für x und y dieselben Koeffizienten wie c aufweist handelt es sich hier ebenfalls um eine

Gerade mit der Steigung $\frac{1}{2}$, allerdings verläuft a durch den Punkt (4|2), wie man durch Einsetzen schnell sieht. Auch diese Gerade lässt sich nun zeichnen. Und weil b bis auf ein Vorzeichen dieselben Koeffizienten wie a aufweist handelt es sich hier um eine Gerade mit der Steigung $-\frac{1}{2}$. Sie verläuft – man setze ein – durch (4|-2), womit auch hier alle notwendigen Angaben für die Zeichnung vorliegen:



Aufgabe 15.9

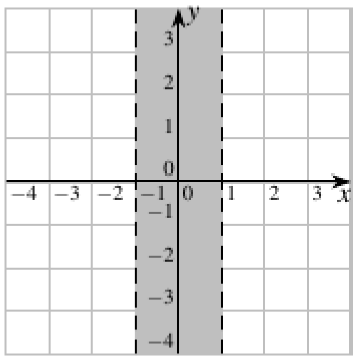
a) Die Gleichung der Randgeraden ist unmittelbar ersichtlich: x=3. Man schraffiere die Teilebene links von der Geraden, da dort alle Punkte eine x-Koordinate kleiner 3 aufweisen. Die Randgerade selbst bleibt gestrichelt.



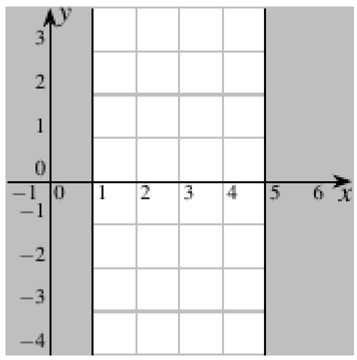
b) Die Randgerade hier lautet y=-4. Man schraffiere die Teilebene oberhalb dieser Geraden, da dort alle Punkte eine y-Koordinate größer -4 aufweisen. Die Punkte der Randgeraden haben die y-Koordinate -4 und erfüllen ebenfalls die Ungleichung. Die Randgerade wird deshalb durchgezogen.

c) Gesucht sind alle Punkte, deren x-Koordinate von 0 mit einem Abstand von weniger als 1 entfernt ist. Das ist der Bereich zwischen den Randgeraden x=1 und x=-1. Die Punkte auf der Randgerade gehören nicht dazu, deshalb werden die Geraden nur gestrichelt.

c)



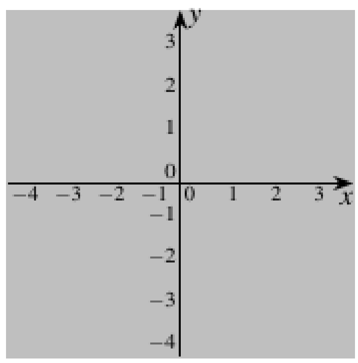
d)



d) Gesucht sind alle Punkte, deren x-Koordinate von 3 mit einem Abstand von minimal 2 entfernt ist. Das ist der Bereich jenseits der Randgeraden x=1 und x=5. Die Punkte auf der Randgeraden gehören dazu, beide Geraden werden deshalb durchgezogen.

e) Gesucht sind – so würde die eingeführte Deutung der Betragsungleichung lauten – alle Punkte, deren doppelte x-Koordinate vom Dreifachen der y-Koordinate den Abstand -1 überschreitet. So kompliziert diese Formulierung anmutet, beschreibt sie doch einen trivialen Sachverhalt: Ein Abstand von -1 liegt immer vor, kleiner als Null kann ein Zahlenwert nicht von einem anderen entfernt sein. Oder ohne Übersetzung der Betragsungleichung: Der Betrag eines Zahlenwertes ist immer größergleich Null. Die gegebene Ungleichung ist daher für alle Wertepaare (x;y) erfüllt.

e)



Aufgabe 15.10

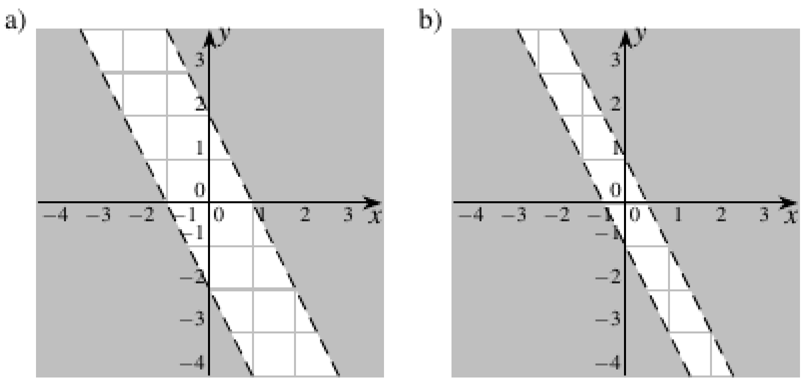
Oben links: Eine mögliche Gleichung für die Randgerade ist y=2x. Weil (0|1) zur gegebenen Punktmenge gehört und die Randgerade nicht, lautet eine mögliche Ungleichung y>2x.

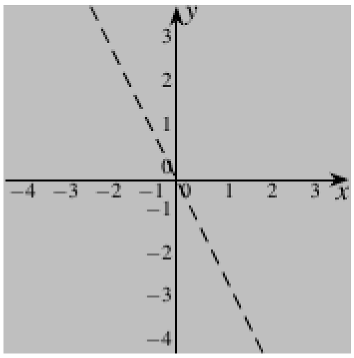
Oben rechts: Eine mögliche Gleichung für die Randgerade ist y=-x-2. Weil (0|0) zur gegebenen Punktmenge gehört und die Randgerade auch, lautet eine mögliche Ungleichung y≥-x-2.

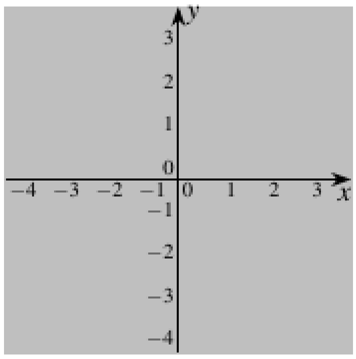
Unten mitte: Die Gleichungen $y=-\frac{1}{2}x-1$ und $y=\frac{1}{2}x+1$ beschreiben beide Randgeraden. Beide sind aber eingeschränkt auf x < -2 bzw. x > -2, so dass y immer positiv ist. Zusammengefasst erhält man also als Gleichung der Randlinie $y=\left|\frac{1}{2}x+1\right|$. Zur gegebenen Punktmenge gehören aber nur die Punkte, deren y-Koordinate größer als $\left|\frac{1}{2}x+1\right|$ ist. Deshalb lautet die gesuchte Ungleichung $y>\left|\frac{1}{2}x+1\right|$.

Auch die „Abstandsdeutung“ des Betrags erlaubt eine Lösung: Markiert sind alle Punkte, deren x-Koordinate von -2 einen in y-Richtung wachsenden maximalen Abstand haben. Abhängig von der y-Koordinate lautet die linke Grenze -2y-2 und die rechte Grenze 2y-2. x muss also gleichzeitig die beiden Bedingungen -2y-2 < x und x < 2y-2 erfüllen. Beide Bedingungen lassen sich durch die Randgeraden $y=-\frac{1}{2}x-1$ und $y=\frac{1}{2}x+1$ darstellen. Ab hier argumentieren wir wie oben: Beide sind eingeschränkt auf x < -2 bzw. x > -2, so dass y immer positiv ist. Zusammengefasst erhält man also als Gleichung der Randlinie $y=\left|\frac{1}{2}x+1\right|$. Zur gegebenen Punktmenge gehören aber nur die Punkte, deren y-Koordinate größer als $\left|\frac{1}{2}x+1\right|$. Deshalb lautet die gesuchte Ungleichung $y>\left|\frac{1}{2}x+1\right|$.

Aufgabe 15.11 Zu a) lauten die Randgeraden 2x + y = 2 und -2x – y = 2. Zu b) lauten diese 2x + y = 1 und -2x – y = 1. Zu c) lautet diese 2x + y = 0, und zu d) gibt es keine echten Ränder, da die Betragsungleichung immer erfüllt ist. In der Zeichnung erkennt man, dass alle Randgeraden parallel sind, wobei der horizontale Abstand zwischen den beiden Randgeraden einer Ungleichung durch den Wert rechts vom Größerzeichen angegeben ist.



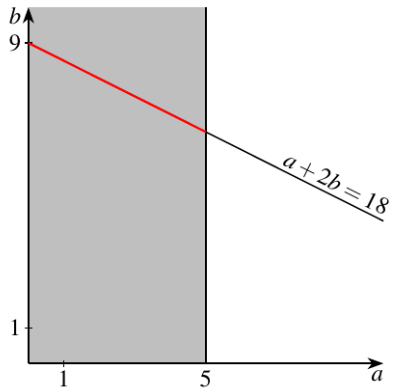
c)


d)


Aufgabe 15.12 Der Zaun wird nur an drei der vier Seiten des rechteckigen Bereichs benötigt, denn die vierte Seite wird von der Garage begrenzt. Diese Seite darf nicht länger als 5 m sein. Außerdem soll der Zaun in seiner gesamten Länge von 18 m genutzt werden. Bezeichnet man nun die einmal benötigte Zaunlänge mit a und die zweimal benötigte Länge mit b, dann lassen sich die Bedingungen wie folgt formulieren:

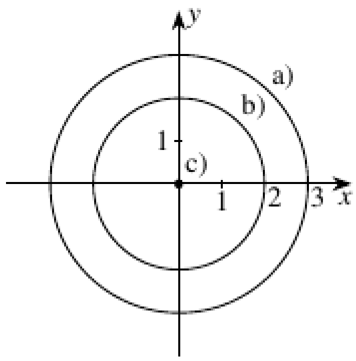
$$a \geq 5 \quad \text{und} \quad a + 2b = 18$$

Beide lassen sich folgendermaßen darstellen:



Der Ort, wo beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind, ist rot gekennzeichnet. Hier lassen sich mögliche Lösungen der Form (a;b) ablesen. Zum Beispiel sind dies (1;8,5) oder (2;8) oder (5;6,5).

Aufgabe 15.13 Die vier Gleichungen unterscheiden sich nur durch den Wert rechts vom Gleichheitszeichen. Offensichtlich gibt es für die vierte Gleichung keine Lösung, denn die Summe zweier Quadratzahlen kann minimal den Wert Null annehmen. Dies ist auch der Grund, dass die dritte Gleichung nur eine Lösung hat, nämlich (0;0). Bis auf die vierte lassen sich also alle Gleichungen als Kreis darstellen, wobei bei c der Kreis mit einem Radius Null aus genau einem Punkt besteht. Die ersten beiden beschreiben Kreise mit den Radien 3 bzw. 2.



Aufgabe 15.14 Betrachten wir zunächst die Gleichungen a bis d, die auf den ersten Blick wie passende Kreisgleichungen aussehen. Allerdings fällt d raus, da sie als eine Differenz aus zwei Quadratklammern enthält. Von den verbleibenden Gleichungen a,b und c ist nur c richtig, da hier die Rechenzeichen in den Quadratklammern die Koordinaten des Mittelpunktes korrekt anzeigen.

Die Gleichungen e,f und g betreffend fällt auf, dass sich die Potenzen nicht außerhalb der Klammern befinden. Diese Gleichungen können also das Ergebnis einer Umformung sein, genauer der Anwendung von binomischen Formeln auf die Klammerterme, die bei c ja korrekt sind. Will man also e,f und g in c überführen, muss man quadratisch ergänzen, wie etwa hier mit g:

$$(x^2-6x)+(y^2+4y)=-12$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2\cdot 3x)+(y^2+2\cdot 2y)=-12$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2\cdot 3x+3\cdot 3)+(y^2+2\cdot 2y+2\cdot 2)=-12+3\cdot 3+2\cdot 2$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2\cdot 3x+9)+(y^2+2\cdot 2y+4)=-12+9+4$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=1$$

Dies ist in der Tat die Gleichung eines Kreises mit dem Radius 1, allerdings hat der Mittelpunkt die Koordinaten (3;-2) und passt daher nicht zum gezeigten Kreis. Analog überprüft man e und f. Nur e lässt sich in die Form c überführen und ist daher eine Gleichung des gegebenen Kreises.

Aufgabe 15.15

c kann man gleich ausschließen, denn der negative Zahlenwert rechts vom Gleichheitszeichen lässt sich nicht als das Quadrat eines Radius interpretieren. Die Gleichung d lässt sich bei quadratischer Ergänzung und unter Anwendung der ersten binomischen Formel in die Form $(x+1)^2+y^2=1$ überführen. Es handelt sich also um einen

Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt (-1|0). Die Angaben zur Zeichnung der Kreise zu a und b sind leicht aus den entsprechenden Gleichungen ablesbar.