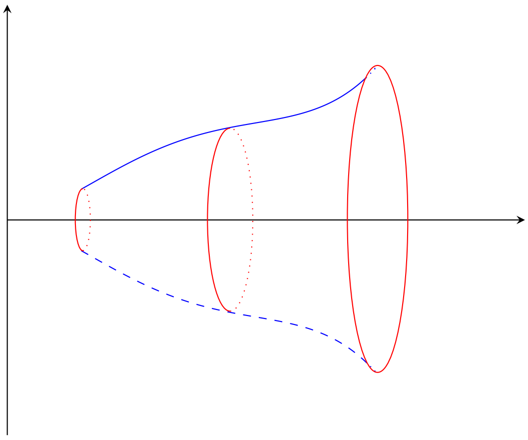
Das Rotationsvolumen

Wenn Körper eine Drehsymmetrie aufweisen, kann man ihr Volumen mithilfe der Integralrechnung verhältnismäßig leicht berechnen. Ist die Drehsymmetrieachse die x-Achse, so kann man sich vorstellen, dass der Körper durch die Rotation einer Randkurve um die x-Achse entsteht.

Das Volumen eines solchen Körpers kann man - in Analogie zur Flächenberechnung in Kapitel 14 des Buchs - durch eine immer feiner werdende Annäherung mit Summen als Aneinanderreihung von Zylindern erreichen. Bei der Flächenberechnung summiert man Rechteckflächen auf; nun sind es gewissermaßen „um die x-Achse rotierende Rechteckflächen“, also Volumina von Kreisscheiben bzw. Zylindern.

An der Stelle x hat eine solche Kreisscheibe den Radius $f(x)$. Bei einer Einteilung des jeweiligen Intervalls $[a;b]$ in n gleich breite Teilintervalle hat jede Kreisscheibe die Dicke $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, also hat eine Kreisscheibe das Volumen $\Delta V = \pi \cdot (f(x))^2 \cdot \Delta x$. Damit ergibt sich das Volumen des Drehkörpers über dem Intervall $[a;b]$ als Summe beziehungsweise im Grenzübergang als Integral

$$V = \pi \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x=a}^{b} (f(x))^2 \cdot \Delta x = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx.$$



Volumen eines Rotationskörpers

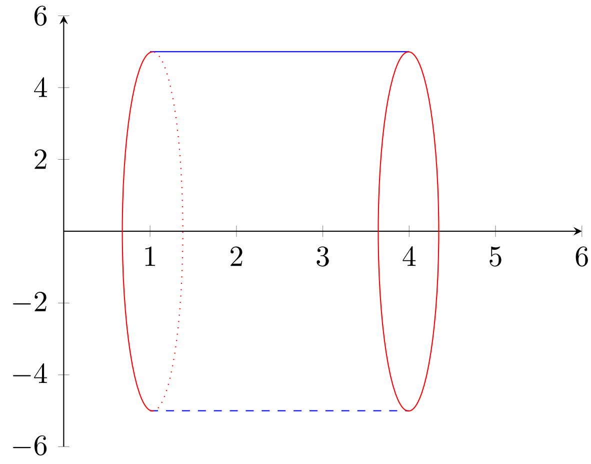
Das Volumen eines Rotationskörpers, der durch Rotation eines Graphen einer (stetigen) Funktion f auf dem Intervall $[a,b]$ um die x-Achse entsteht, wird berechnet durch

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx.$$

Beispiel 1 Zu bestimmen ist das Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotation des Graphen von f mit $f(x) = c$ auf dem Intervall $[1;4]$ mit einer reellen Konstanten c entsteht.

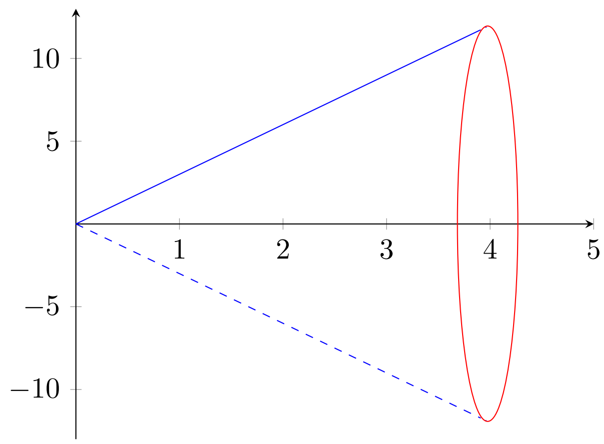
Anschaulich ist klar, dass durch die Rotation ein Zylinder entsteht. Sein Volumen berechnet sich mit obiger Formel

$$V = \pi \cdot \int_1^4 c^2\,dx = \pi \cdot \left[c^2 \cdot x\right]_1^4 = 3\pi c^2.$$



Ergebnis: Es ist $V = 3\pi c^2$. ◀

Beispiel 2 Zu bestimmen ist das Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotation des Graphen von f mit $f(x) = 3x$ auf dem Intervall $[0; 4]$ entsteht.



Anschaulich ist klar, dass durch die Rotation ein Kegel entsteht. Sein Volumen berechnet sich mit obiger Formel

$$V = \pi \cdot \int_0^4 (3x)^2\, dx = \pi \cdot \left[3x^3\right]_0^4 = 192\pi.$$

Ergebnis: Es ist $V = 192\pi$. ◀

Beispiel 3 Zu bestimmen ist das Volumen desjenigen Rotationskörpers, der durch Rotation des Graphen von f mit $f(x) = \sqrt{x}$ auf dem Intervall $[0; 4]$ entsteht.

Es berechnet sich mit obiger Formel

$$V = \pi \cdot \int_0^4 x\, dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = 8\pi.$$

Ergebnis: Es ist $V = 8\pi$. ◀

Aufgabe 1 Bestimmen Sie jeweils das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn der Graph der Funktion f (gegeben durch $f(x)$) auf dem Intervall $[a; b]$ um die x-Achse rotiert.

a) $f(x) = 4$, $a = 4$, $b = 6$

b) $f(x) = x$, $a = 0$, $b = 3$

c) $f(x) = \sin(x)$, $a = 0$, $b = \pi$

d) $f(x) = e^x$, $a = 0$, $b = 1$

e) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$, $b = 2$

f) $f(x) = x^2 + x + 1$, $a = -1$, $b = 4$

Lösung 1 Es ergeben sich folgende Volumina:

a) $V = 32 \cdot \pi$

b) $V = 9 \cdot \pi$

c) $V = \pi \cdot \int_0^\pi (\sin(x))^2 \; dx = \pi \cdot \int_0^\pi \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2x)) \; dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot \sin(2x)\right)\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$

d) $V = \frac{\pi}{2} \cdot (e^2 - 1)$

e) $V = \frac{\pi}{2}$

f) $V = \frac{835}{2} \cdot \pi$