Der Mittelwert Eine weitere Anwendung des Integrals besteht in der Möglichkeit, den Mittelwert der Funktionswerte einer Funktion auf einem Intervall zu berechnen. Dies kann immer dann interessant sein, wenn Daten in einem funktionalen Zusammenhang gegeben sind. Zahlreiche Anwendungen aus der Physik fußen auf diesem Prinzip (siehe Beispiel 2).

Begonnen werden kann bei der Überlegung, den arithmetischen Mittelwert $\overline{y}$ von n diskreten Werten $y_1, y_2, \ldots, y_n$ zu berechnen.

Der Mittelwert berechnet sich zu

$$\overline{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Damit berechnet sich der Mittelwert von n Funktionswerten einer Funktion f an den Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entsprechend zu

$$\overline{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Die Ähnlichkeit, die sich zu Ober- und Untersumme und zur Gewinnung des Integralbegriffs ergibt, ist nicht zufällig. Stellt man sich vor, dass man den Mittelwert aller Funktionswerte auf einem Intervall bestimmen möchte und lässt den Wert von n groß werden, so gilt bei einer Unterteilung eines Intervalls $[a; b]$ in n gleich breite „Streifen“ der Breite Δx:

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Somit gilt:

Mittelwert

Für eine auf einem Intervall $[a; b]$ integrierbare Funktion f ist

$$\overline{y} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

der **Mittelwert von f über** $[a; b]$.

Beispiel 1 Zu berechnen ist der Mittelwert der Funktion f mit $f(x) = x^3$ auf dem Intervall $I_1 = [0; 4], I_2 = [0; 8]$ beziehungsweise $I_3 = [-4; 4]$.

Es ist

$$\overline{y}_1 = \frac{1}{4-0} \cdot \int_0^4 x^3\,dx = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^4 = \frac{1}{4} \cdot 64 = 16,$$

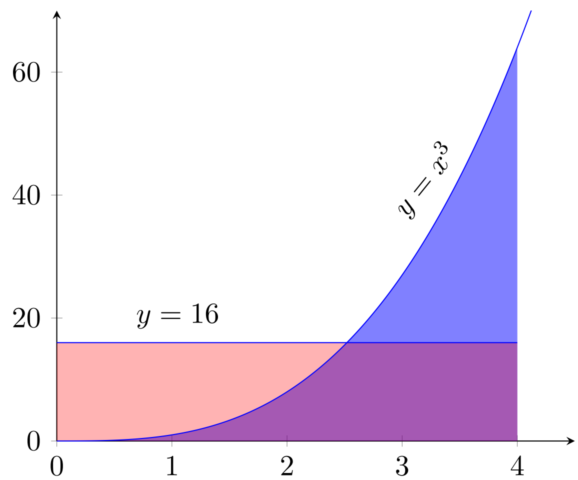
$$\overline{y}_2 = \frac{1}{8-0} \cdot \int_0^8 x^3\,dx = \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^8 = \frac{1}{8} \cdot 1024 = 128,$$

$$\overline{y}_3 = \frac{1}{4-(-4)} \cdot \int_{-4}^4 x^3\,dx = \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-4}^4 = \frac{1}{8} \cdot 0 = 0.$$

Ergebnis: Die Mittelwerte lauten $\overline{y}_1 = 16$, $\overline{y}_2 = 128$ und $\overline{y}_3 = 0$. ◀

Den Mittelwert als durchschnittlichen Funktionswert einer Funktion f auf einem Intervall $[a; b]$ kann man auch über die Flächeninhalte interpretieren. Denn der Flächeninhalt unter der Kurve von f hat den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck der Breite $b - a$ und dem Mittelwert $\overline{y}$

als Höhe. Im Folgenden ist die Situation für die Funktion f aus dem Beispiel 1, dem Intervall $[0;4]$ und dem Mittelwert $\overline{y} = 16$ dargestellt.



Beispiel 2 In der Physik ist der Begriff des Effektivwerts wichtig. Beispielsweise beschreibt der Effektivwert U_{eff} einer Wechselspannung U den Wert derjenigen Gleichspannung, der an einem ohmschen Widerstand R mit Stromstärke I die gleiche Leistung P umsetzt, wie im Mittel von der vorliegenden Wechselspannung umgesetzt wird.

Dazu ist für eine Wechselspannung U mit $U(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$ der Mittelwert von $U^2(t)$ auf einem Periodenintervall $[0;T]$ zu bestimmen. Das Quadrat ergibt sich aus $P = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R}$. Hier sind $\hat{U}$ die Amplitude der Wechselspannung, $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ die Kreisfrequenz und T die Periodendauer. Man berechnet

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}^2 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T U^2(t)\, dt \\ &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \hat{U}^2 \cdot \sin^2(\omega t)\, dt \\ &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \hat{U}^2 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \cos(2\omega t)\right)\, dt. \end{aligned}$$

Hier benutzen wir die Beziehung $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$. Damit ist also

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}^2 &= \hat{U}^2 \cdot \frac{\omega}{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{2} t - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t)\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \\ &= \hat{U}^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \pi \\ &= \frac{\hat{U}^2}{2} \end{aligned}$$

Ergebnis: Der Effektivwert einer Wechselspannung beträgt $U_{\text{eff}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$, also circa 70,7% der Amplitude der Wechselspannung. ◀

Aufgabe 1 Berechnen Sie im jeweils angegebenen Intervall I den Mittelwert der folgenden, durch den Funktionsterm $f(x)$ gegebenen Funktion f.

a) $f(x) = x$, $I = [0;2]$

b) $f(x) = x^4$, $I = [0;2]$

c) $f(x) = \sin(x)$, $I = [0;\pi]$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $I = [1;e]$

d) $f(x) = x^2 + 1$, $I = [-2;2]$

e) $f(x) = e^x$, $I = [0;2]$

Lösung 1 Die zugehörigen Mittelwerte berechnen sich wie folgt:

a) $$\overline{y} = \frac{1}{2-0}\int_0^2 x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = 1$$

b) $$\overline{y} = \frac{1}{2-0}\int_0^2 x^4\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^2 = \frac{16}{5}$$

c) $$\overline{y} = \frac{1}{\pi-0}\int_0^\pi \sin(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot[-\cos(x)]_0^\pi = \frac{2}{\pi}$$

d) $$\overline{y} = \frac{1}{e-1}\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{e-1}\cdot[\ln(x)]_1^e = \frac{1}{e-1}$$

e) $$\overline{y} = \frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^2 (x^2+1)\,dx = \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-2}^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{8}{3}+2+\frac{8}{3}+2\right) = \frac{7}{3}$$

f) $$\overline{y} = \frac{1}{2-0}\int_0^2 e^x\,dx = \frac{1}{2}\cdot[e^x]_0^2 = \frac{1}{2}(e^2-1)$$