# Ausführliche Lösungen

## 14.1

a) Da die Funktion $f$ im Intervall $[1;4]$ monoton steigend ist, werden für die Obersumme die jeweils rechten Randwerte des jeweiligen Intervalls und entsprechend die linken Randwerte für die Untersumme herangezogen. Damit berechnet sich die Obersumme $O_3$ zu

$$O_3 = \frac{4-1}{3} \cdot (f(2) + f(3) + f(4)) = 32$$

und die Untersumme $U_3$ zu

$$U_3 = \frac{4-1}{3} \cdot (f(1) + f(2) + f(3)) = 17.$$

b) Es ergeben sich für feinere Unterteilungen folgende Ober- und Untersummen:

$$O_{10} \approx 26{,}29,\ U_{10} \approx 21{,}80,\ O_{50} \approx 24{,}45,\ U_{50} \approx 23{,}55,\ O_{150} \approx 24{,}15,\ U_{150} \approx 23{,}85$$

Der exakte Wert ergibt sich über das Integral, das zu berechnen ist.

$$\int_1^4 (x^2+1)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_1^4 = \frac{64}{3} + 4 - \left(\frac{1}{3} + 1\right) = 24.$$

◄

## 14.2

a) Der Zufluss beträgt 10 Liter pro Minute. Der rekonstruierte Wasserbestand lässt sich dann wie folgt durch ein Integral angeben:

$$W(t) = \int_0^t 10\,dx + W(0) = 10 \cdot t + W(0)$$

Da $W(0) = 0$ gilt, ist somit $W(t) = 10 \cdot t$. Aus $W(25) = 250$ ergibt sich, dass nach $t = 25$ Minuten 250 Liter Wasser im Becken sind.

b) Der Zufluss beträgt erneut 10 Liter pro Minute. Der rekonstruierte Wasserbestand lässt sich wieder durch ein Integral angeben:

$$W(t) = \int_0^t 10\,dx + W(0) = 10 \cdot t + W(0)$$

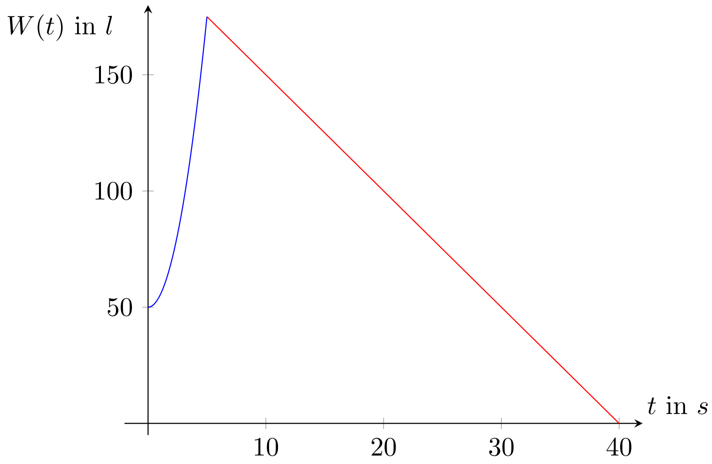
Da nun $W(0) = 50$ gilt, ist $W(t) = 10 \cdot t + 50$. Aus $W(20) = 250$ ergibt sich, dass nach $t = 20$ Minuten 250 Liter Wasser im Becken sind.

c) Für die ersten 5 Minuten gilt also $W(t) = \int_0^t 10 \cdot x\,dx + 50 = 5 \cdot t^2 + 50$ (nach den Überlegungen des a- und b-Teils). Am Ende der 5 Minuten beträgt der Wasserbestand $W(5) = 175$ Liter.

Anschließend gilt für $t > 5$ wegen $W(5) = 175$

$$W(t) = -\int_5^t 5\,dx + 175 = -\left[5 \cdot x\right]_5^t + 175 = -5(t-5) + 175.$$

Die Gleichung $W(t) = 0$ hat die Lösung $t = 40$, also ist das Becken nach 40 Minuten leer.




◀

**14.3** Zu berechnen sind die folgenden bestimmten Integrale ohne Taschenrechner.

a) $\displaystyle\int_2^4 x^4\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_2^4 = \frac{1024}{5} - \frac{32}{5} = 198{,}4$

b) $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^\pi = 2$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^1 = 0$

d) $\displaystyle\int_{\frac{1}{10}}^1 \frac{1}{x}\,dx = [\ln(x)]_{\frac{1}{10}}^1 = \ln(1) - \ln(\frac{1}{10}) = 0 - (-\ln(10)) = \ln(10)$

e) $\displaystyle\int_2^3 e^x\,dx + \int_3^4 e^x\,dx = [e^x]_2^3 + [e^x]_3^4 = e^4 - e^2 = e^2(e^2-1)$

f) $\displaystyle\int_0^2 3\,dx = [3x]_0^2 = 6$

g) $\displaystyle\int_{-3}^2 (2+x)^3\,dx = \left[\frac{1}{4}(2+x)^4\right]_{-3}^2 = 64 - \frac{1}{4} = 63{,}75$

h) $\displaystyle\int_1^3 (2x^2 - x^4)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_1^3 = \frac{54}{3} - \frac{243}{5} - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{52}{3} - \frac{242}{5} = -\frac{466}{15}$

◀

**14.4** Das unbestimmte Integral liefert alle Stammfunktionen $F$ von $f$, dabei ist $C$ eine beliebige reelle Zahl. Die maßgeblichen Regeln sind angegeben.

a) $F(x) = \int x^5\,dx = \frac{1}{6}x^6 + C$, Potenzregel

b) $F(x) = \int 7x^3\,dx = \frac{7}{4}x^4 + C$, Faktor-, Potenzregel

c) $F(x) = \int \frac{x^2}{9}\,dx = \frac{1}{27}x^3 + C$, Faktor-, Potenzregel

d) $F(x) = \int (3x^2 - 7x + 6)\,dx = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 6x + C$, Faktor-, Summen-, Potenzregel

e) $F(x) = \int \sin(x+1)\,dx = -\cos(x+1) + C$, Lineare Verkettung

f) $F(x) = \int \left(\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x}\right)\,dx = -\frac{2}{x} + 2\ln(|x|) + C$, $x \neq 0$ Potenz-, Summenregel

g) $F(x) = \int e^{2x} + \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}\sin(2x) + C$, Summenregel

h) $F(x) = \int \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{3}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}} + C$, Potenz-, Faktorregel

◀

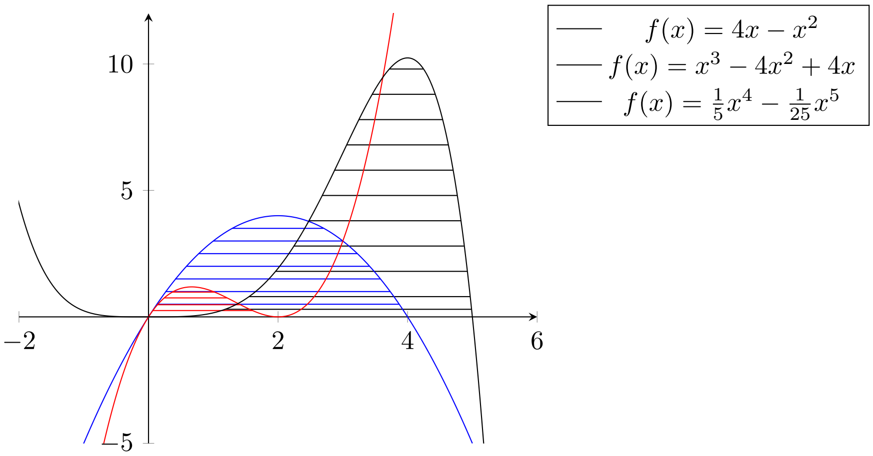
**14.5** Zu berechnen sind die Nullstellen von $f$, gesucht sind ferner das jeweilige Schaubild und die vom

Graphen von $f$ und der $x$-Achse eingeschlossene Fläche.

a) Die Nullstellen von $f$ mit $f(x) = 4x - x^2$ lauten $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, die eingeschlossene Fläche berechnet sich zu
$$A = \int_0^4 f(x)\,dx = \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^4 = \frac{32}{3}.$$

b) Die Nullstellen von $f$ mit $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ lauten $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, die eingeschlossene Fläche berechnet sich zu
$$A = \int_0^2 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

c) Die Nullstellen von $f$ mit $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{25}x^5$ lauten $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, die eingeschlossene Fläche berechnet sich zu
$$A = \left|\int_0^5 f(x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{25}x^5 - \frac{1}{150}x^6\right]_0^5\right| = \left|-\frac{125}{6}\right| = \frac{125}{6}.$$



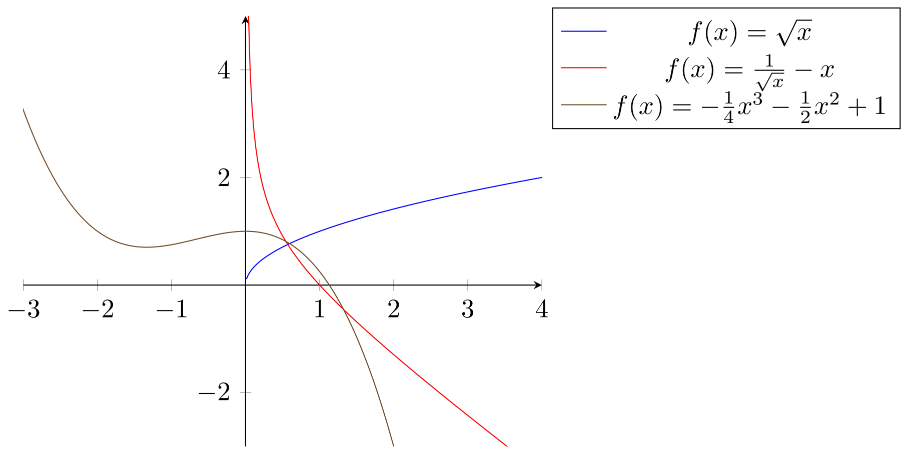

◀

**14.6** Zu berechnen ist der Inhalt der Fläche, die vom Schaubild von $f$, der $x$-Achse sowie den Geraden mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird.

a) $A = \int_2^4 \sqrt{x}\,dx = -\frac{4}{3} \cdot \sqrt{2} + \frac{16}{3}$

b) $A = \int_1^4 (\frac{1}{\sqrt{x}} - x)\,dx = \frac{11}{2}$

c) $A = \int_{-1}^0 (-\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1)\,dx = \frac{43}{48}$

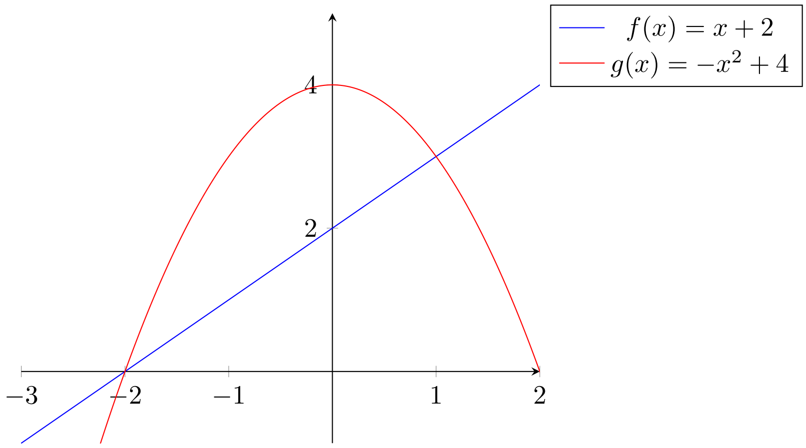



◀

**14.7** Zu bestimmen ist der Wert des Flächeninhalts, der von den beiden gegebenen Kurven eingeschlossen wird.

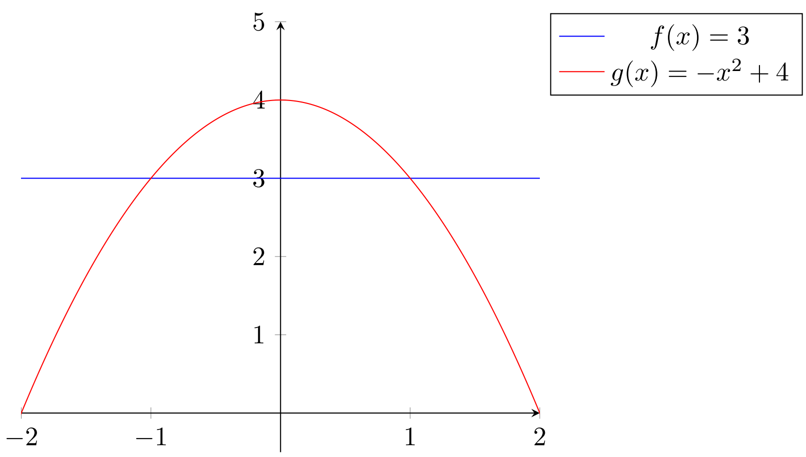
a) Aus $x+2=-x^2+4$ ergeben sich die Lösungen $x_1=-2$, $x_2=1$, damit ist

$$A=\int_{x_1}^{x_2}|f(x)-g(x)|\;dx=\int_{-2}^{1}\left|x+2+x^2-4\right|\;dx=-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-2}^{1}-=\frac{9}{2}.$$



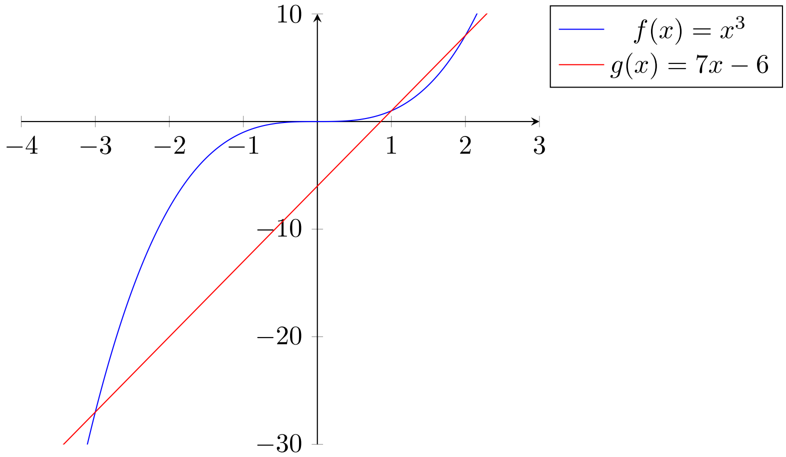

b) Aus $3=-x^2+4$ ergeben sich die Lösungen $x_1=-1$, $x_2=1$, damit ist

$$A=\int_{x_1}^{x_2}|f(x)-g(x)|\;dx=\int_{-1}^{1}\left|3+x^2-4\right|\;dx=-\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-1}^{1}=\frac{9}{2}.$$



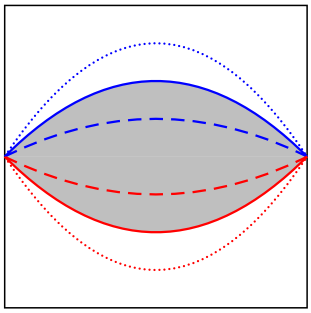

c) Aus $x^3=7x-6$ ergeben sich (zum Beispiel durch Raten der ersten Nullstelle mit anschließender Polynomdivision, siehe Zusatzmaterial zu Kapitel 12) die Schnittstellen: $x_1=-3$, $x_2=1$, $x_3=2$. Da zwischen $x=-3$ und $x=1$ die Kurve von $f$ oberhalb der Kurve von $g$ verläuft, kann auf den Betrag verzichtet werden. Damit ist

$$\begin{aligned}A&=\int_{x_1}^{x_2}|f(x)-g(x)|\;dx=\int_{-3}^{1}\left(x^3-7x+6\right)\;dx+\int_{1}^{2}\left|x^3-7x+6\right|\;dx\\&=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{7}{2}x^2+6x\right]_{-3}^{1}-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{7}{2}x^2+6x\right]_{1}^{3}=32{,}75.\end{aligned}$$




◀

**14.8** Gesucht sind parabelförmige, spiegelbildliche Kurven und und deren mögliche Gleichungen, sodass die Hälfte der Gesamtfläche zwischen den Kurven eingeschlossen ist.



Wenn man den Ursprung des Koordinatensystems links in den Treffpunkt der beiden Parabeln legt, so lautet ein Ansatz für den oberen (also blauen) parabelförmigen Bogen $a \cdot x \cdot (10 - x)$. Aus Symmetriegründen muss gelten, dass die eingeschlossene Fläche zwischen der oberen Randkurve und der $x$-Achse ein Viertel (die Hälfte der Hälfte von 100 $\mathrm{m}^2$) der Gesamtfläche einnimmt. Aus der Bedingung

$$\int_0^{10} a \cdot x \cdot (10 - x)\, dx = \left[\ 5ax^2 - \frac{a}{3}x^3\ \right]_0^{10} = 25$$

ergibt sich $\frac{500}{3}a = 25$ und damit $a = \frac{3}{20}$. Mögliche Randfunktionen $f$ (obere Randfunktion) und $g$ (untere Randfunktion) können also durch die Funktionsterme $f(x) = \frac{3}{20} \cdot x \cdot (x - 10)$ und aus Symmetriegründen $g(x) = -\frac{3}{20} \cdot x \cdot (x - 10)$ vorgegeben werden. ◀