Die Quotientenregel

Eine weitere Ableitungsregel, die für Funktionen f mit einem Funktionsterm der Form $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ hilfreich ist, kann man leicht aus Ketten- und Produktregel herleiten:

1. Als ersten Schritt leitet man den Kehrwert einer Funktion v mit $v(x)$ ab, also $f(x) = \frac{1}{v(x)}$. Hier ist v die innere Funktion, von deren Ergebnis der Kehrwert genommen wird. Die äußere Funktion ist f mit $f(v) = v^{-1}$. Von dieser kennen wir die Ableitung schon (siehe Beispiele im Buchkapitel 13). Es ist also

$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = \underbrace{-\frac{1}{(v(x))^2}}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{v'(x)}_{\text{innere Abl.}} = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$$

2. Kombinieren wir dieses Zwischenergebnis mit der Produktregel, können wir auch Quotienten mit beliebiger Zählerfunktion ableiten. Es ist

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = u(x) \cdot \frac{1}{v(x)}$$

Also ist wegen der Produktregel

$$f'(x) = u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x) \cdot \left(-\frac{v'(x)}{v^2(x)}\right) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

Diese Ableitungsregel nennt man die Quotientenregel.

Wenn Sie sich diese zusätzlichen Regel nicht merken möchten, kann man sie jederzeit durch Produkt- und Kettenregel ersetzen; insbesondere für gebrochenrationale Funktionen ist sie jedoch nützlich.

Quotientenregel

Für eine Funktion f mit $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ hat die Ableitung f' den Funktionsterm

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \quad \text{für } v(x) \neq 0.$$

Beispiel 1 Zu berechnen ist die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \frac{3x^3-2x+1}{x^2}$.

Mit der Quotientenregel berechnet man

$$f'(x) = \frac{(9x^2-2) \cdot x^2 - (3x^3-2x+1) \cdot 2x}{x^4}\,.$$

Ergebnis: Es ist $f'(x) = \frac{3x^3+2x-2}{x^3}$. ◀

Beispiel 2 Zu berechnen ist die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \frac{\sin(2x)}{x}$.

Mit der Quotientenregel und der Kettenregel berechnet man

$$f'(x) = \frac{2\cos(2x) \cdot x - \sin(2x) \cdot 1}{x^2}\,.$$

Ergebnis: Es ist $f'(x) = \frac{2x\cos(2x)-\sin(2x)}{x^2}$. ◀

Beispiel 3 Berechnen Sie die Ableitung der Tangensfunktion mit Hilfe der Quotientenregel!

Die Tangensfunktion ist als Quotient von Sinus- und Kosinusfunktion definiert: Es ist $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Also ist für f mit $f(x) = \tan(x)$ die Ableitung

$$f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)}$$

Dieser Ausdruck lässt sich auf zweierlei Art vereinfachen, und zwar einerseits mit Hilfe des trigonometrischen Pythagoras ($\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$) zu

$$f'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

oder andererseits durch Auseinanderziehen des Bruches und anschließendes Kürzen zu

$$f'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

Beide Formen der Ableitung der Tangensfunktion sind richtig und hilfreich, je nachdem, was Sie damit weiter machen möchten.

Ergebnis: Es ist $(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$. ◀

Aufgabe 1 Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen f mit

a) $f(x) = \dfrac{7x}{x+10}$

b) $f(x) = \dfrac{\cos(5x)}{2x}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

d) $f(x) = \dfrac{x \cdot e^x}{x+1}$

Lösung 1 Die zugehörigen Ableitungsfunktionen haben die folgenden Funktionsterme:

$$\begin{aligned}
\text{a) } f'(x) &= \frac{7(x+10) - 7x}{(x+10)^2} = \frac{70}{(x+10)^2} \\
\text{b) } f'(x) &= \frac{-5\sin(5x) \cdot 2x - \cos(5x) \cdot 2}{4x^2} = \frac{-5x \cdot \sin(5x) - \cos(5x)}{2x^2} \\
\text{c) } f'(x) &= \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1) \cdot (2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2} \\
\text{d) } f'(x) &= \frac{(e^x + x \cdot e^x)(x+1) - x \cdot e^x}{(x+1)^2} = \frac{e^x \cdot (2+x^2)}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$