Ausführliche Lösungen

13.1

a) Da die Werte von x gegen $+\infty$ streben, strebt auch $(x-1)$ gegen $+\infty$, der Kehrwert $\frac{1}{(x-1)}$ also gegen Null. Es ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x-1} = 3 \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} = 0\,.$$

b) Hier geht es um das Verhalten der Funktion in der Nähe der Stelle $x = 1$, an der die Funktion f nicht definiert ist. Die Werte von $(x-1)^2$ sind wegen der geraden Potenz immer positiv und nähern sich der Null an, wenn x gegen 1 strebt. Der Kehrwert $\frac{1}{(x-1)^2}$ strebt daher gegen $+\infty$. Es handelt sich um eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel. Obwohl der Grenzwert keine Zahl ist, kann man verallgemeinernd die Limes-Schreibweise benutzen; man schreibt: $\lim_{x\to 1} \frac{3}{(x-1)^2} = +\infty$.

c) Man erkennt hier im Nenner ein Binom, so dass man für alle $x \neq 2$ den gemeinsamen Faktor $(x-2) \neq 0$ kürzen kann:

$$f(x) = \frac{2(x-2)}{(x^2-4)} = \frac{2}{(x+2)} \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)}{(x^2-4)} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{(x+2)} = \frac{1}{2}\,.$$

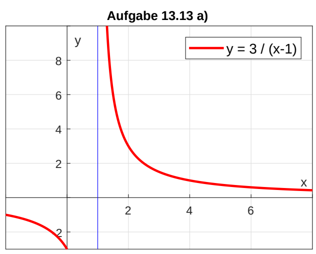
Die Funktion ist an der Stelle $x = 2$ nicht definiert, hat aber einen Grenzwert. Man spricht in einem solchen Fall von einer Lücke der gebrochenrationalen Funktion.

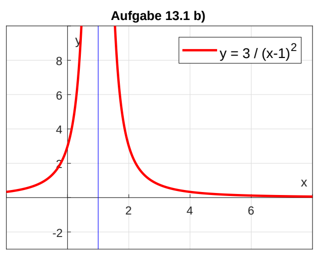
d) Wieder nutzt man die gekürzte Darstellung der Funktion und argumentiert ähnlich wie in Aufgabenteil b). Weil es sich hier aber um den Kehrwert von $(x+2)$ handelt (ohne Quadrat), das rechts und links der Stelle $x = -2$ unterschiedliches Vorzeichen hat, handelt es sich bei $x = -2$ um eine Polstelle von f mit Vorzeichenwechsel, und es ist $\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$.

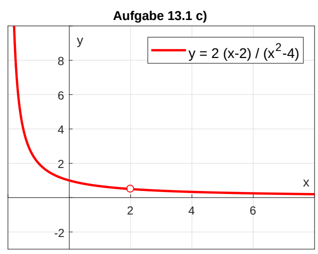
e) Weil der Grad im Zähler von f größer ist als im Nenner, ist $\lim_{x\to\infty} \frac{(x-2)^3}{(x^2+1)} = \infty$.

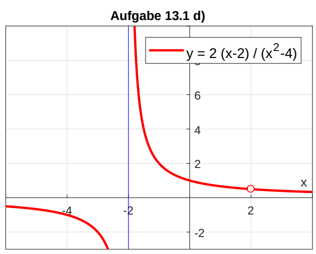
f) Weil der Grad im Zähler von f kleiner ist als im Nenner, ist $\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+1)}{(x-2)^3} = 0$.

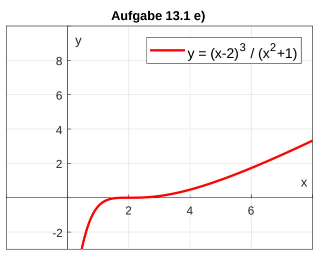
Stellt man die Graphen der Funktionen mit einem elektronischen Hilfsmittel grafisch dar, kann man das erfragte Grenzwertverhalten aus dem Schaubild ablesen. Mehr zu den Grenzwerten gebrochenrationaler Funktionen für $x \to \pm\infty$ finden Sie auch im weiteren Zusatzmaterial zu diesem Kapitel.

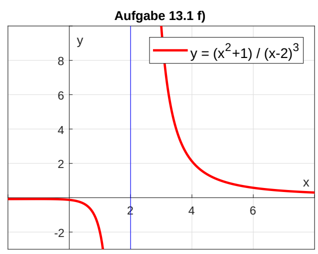












13.2

a) Richtig. Die Ableitung an der Stelle $x_0 = 0$ beschreibt die Steigung der Tangente an den Graphen von f an dieser Stelle.

b) Richtig. Die Steigung m der Tangente kann benutzt werden, um den Schnittwinkel α auszurechnen. Es ist $\tan(\alpha) = m$; in diesem Fall $\tan(\alpha) = 1$, also $\alpha = 45°$.

c) Gilt nicht für jede Funktion f. Die Ableitung an der Stelle $x_0 = 1$ sagt über die Steigung der Tangente in $x = -1$ nichts aus. Eine (negative) Steigung von $m = -1$ bedeutet außerdem einen Steigungswinkel von $-45°$. Gegenbeispiel: Funktion f mit $f(x) = x^2 - 3x$.

d) Gilt nicht für jede Funktion f. Hier hat die Ableitung f' in $x = 2$ eine Nullstelle, also hat der Graph von f eine Tangente mit Steigung $m = 0$. Über den Wert der Funktion f an dieser Stelle lässt das keine Aussage zu. Gegenbeispiel: Funktion f mit $f(x) = 3x^2 - 12x + 1$.

e) Richtig. Hier hat die Ableitung f' in $x = 5$ eine Nullstelle, also hat der Graph von f hier eine Tangente mit Steigung $m = 0$. Das bedeutet, dass die Tangente waagerecht ist.

f) Falsch. Es ist $f'(1) = 6 > 0$.

g) Richtig. Es ist $f'(0) = 0$.

◀

13.3 Die Geschwindigkeitsfunktion ergibt sich als Ableitung der Wegfunktion nach der Zeit zu $v(t) = \dot{s}(t) = g{\cdot}t$. Daraus berechnet man den Zeitpunkt t (in Sekunden), zu dem die Geschwindigkeit $v = 30$ km/h erreicht wird, wie folgt (Einheiten beachten):

$$v(t) = 30\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 30 \cdot \frac{1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} \;\Leftrightarrow\; 8{,}\bar{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = g \cdot t \;\Leftrightarrow\; t \approx 0{,}85\ \text{s}\,.$$

◀

13.4 Man entnimmt der Tabelle in Kapitel 13 die folgenden Ableitungen der elementaren Funktionen:

a) Ableitung einer Potenzfunktion: $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

b) Die Ableitung einer Konstanten ist $f'(x) = 0$.

c) In Potenzschreibweise ist $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Also ist $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

d) In Potenzschreibweise ist $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$. Also ist $f'(x) = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$.

e) In Potenzschreibweise ist $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$. Also ist $f'(x) = -3 \cdot x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$.

f) Die Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion ist $f'(x) = \frac{1}{x}$.

◀

13.5 Man bestimmt zunächst die Ableitung von f mit Hilfe der Faktor- und Kettenregel: Es ist $f(x) = 3 \cdot (x-2)^{-1}$, also $f'(x) = 3 \cdot (-1) \cdot (x-2)^{-2} = -\frac{3}{(x-2)^2}$. Damit berechnet man

$$f'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2} \overset{!}{=} -3 \;\Leftrightarrow\; (x-2)^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; x - 2 = \pm 1\,.$$

Von den beiden Lösungen liegt nur eine im Intervall $]2; +\infty[$. Also hat im Intervall $]2; +\infty[$ die Tangente an den Graphen von f die Steigung -3 nur an der Stelle $x_0 = 3$. ◀

13.6 Ab dem Aufgabenteil h) ist jeweils nur noch die wichtigste Ableitungsregel aufgeführt, Summen- und Faktorregel braucht man häufig zusätzlich.

a) Summen- und Faktorregel: $f'(x) = 15x^2 + 8x$.

b) Summen- und Faktorregel: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

c) Produktregel: $f'(x) = \cos(x) - x \cdot \sin(x)$.

d) Produktregel, Summen- und Faktorregel: $f'(x) = -3 \cdot e^x + (1-3x) \cdot e^x = -(2+3x) \cdot e^x$.

e) Summenregel, Kettenregel: $f'(x) = 2 \cdot (1+x^2) \cdot 2x = 4x \cdot (1+x^2)$.

Alternativ hätte man mit Summen- und Produktregel arbeiten können: $f'(x) = 2x \cdot (1+x^2) + (1+x^2) \cdot 2x = 4x \cdot (1+x^2)$.

f) Kettenregel, Summen- und Faktorregel: $f'(x) = 3 \cdot \cos(3x + \frac{\pi}{2})$.

g) Ketten- und Faktorregel: $f'(x) = -2 \cdot e^{-2x}$.

h) Kettenregel: $f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}$.

i) Ketten- und Produktregel: $f'(x) = -e^{-x}\sin(2x) + 2e^{-x}\cos(2x)$.

j) Produktregel: $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \sin(x) + \frac{1}{x} \cdot \cos(x)$.

Alternativ kann man f als Quotient schreiben: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ und die Ableitung mit der Quotientenregel bestimmen: $f'(x) = \frac{\cos(x)\cdot x - \sin(x)}{x^2}$.

k) Es handelt sich um eine Konstante: $f'(x) = 0$.

l) Produktregel: $f'(x) = \ln(x) + 1$.

m) In Potenzschreibweise kann man die Kettenregel anwenden: $f'(x) = -2 \cdot (x-1)^{-3} = -\frac{2}{(x-1)^3}$.

Alternativ könnte man mit der Quotientenregel arbeiten: $f'(x) = \frac{0\cdot(x-1)^2 - 1\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{2}{(x-1)^3}$.

n) In Potenzschreibweise kann man die Kettenregel anwenden: $f'(x) = -3 \cdot (2x-1)^{-4} \cdot 2 = -\frac{6}{(2x-1)^4}$.

Alternative mit Quotienten- und Kettenregel: $f'(x) = \frac{0\cdot(2x-1)^3 - 1\cdot 3(2x-1)^2\cdot 2}{(2x-1)^6} = -\frac{6}{(2x-1)^4}$.

o) Für die Anwendung von Produkt- und Kettenregel schreibt man die Funktion zunächst um zu $f(x) = 3(x-2)\cdot(x-1)^{-1}$. Dann ist

$$f'(x) = 3\cdot(x-1)^{-1} + 3(x-2)\cdot(-1)\cdot(x-1)^{-2} = \frac{3}{(x-1)} - \frac{3(x-2)}{(x-1)^2} = \frac{3(x-1)-3(x-2)}{(x-1)^2} = \frac{3}{(x-1)^2}\,.$$

Alternative mit Quotientenregel: $f'(x) = \frac{3(x-1)-3(x-2)}{(x-1)^2} = \frac{3}{(x-1)^2}$.

p) Ebenso kann man auch hier Produkt- und Kettenregel anwenden, wenn man $f(x) = (3x^2-4x)\cdot(x+2)^{-2}$ schreibt. Dann ist

$$f'(x) = (6x-4)\cdot(x+2)^{-2} + (3x^2-4x)\cdot(-2)(x+2)^{-3} = \frac{(6x-4)\cdot(x+2) - (6x^2-8x)}{(x+2)^3} = \frac{16x-8}{(x+2)^3}\,.$$

Alternative mit Quotientenregel: $f'(x) = \frac{(6x-4)\cdot(x+2)^2 - (3x^2-4x)\cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{16x-8}{(x+2)^3}$.

◀

13.7 Die Ableitung zweiter Ordnung ist die Ableitung der Ableitungsfunktion f'. Sie sagt etwas über das Änderungsverhalten der Steigung des Funktionsgraphen aus.

a) $f'(x) = 10x,\ \ f''(x) = 10$.

b) $f'(x) = 2\cos(2x),\ \ f''(x) = -4\sin(2x)$.

c) $f'(x) = -3e^{-3x},\ \ f''(x) = 9e^{-3x}$.

d) $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),\ \ f''(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

Anmerkung: Die Funktion f mit $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ nennt man auch **Hyperbelkosinus** oder **Kosinus hyperbolicus** und schreibt kurz: $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Es ist die namensgebende Funktion der Kooperation Schule-Hochschule (siehe Vorwort des Arbeitsbuchs). Die Ableitungsfunktion des Hyperbelkosinus ist der **Hyperbelsinus** oder **Sinus hyperbolicus** mit $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

e) $f'(x) = \frac{1}{x},\ \ f''(x) = -\frac{1}{x^2}$.

◀

13.8 Waagerechte Geraden haben Steigung Null, und die Steigung der Tangente an den Graphen von f in x entspricht dem Wert der Ableitung f' an dieser Stelle. Um also festzustellen, wo der Graph einer Funktion f eine waagerechte Tangente hat, bestimmt man die Ableitung f' der Funktion und berechnet alle Nullstellen der Ableitungsfunktion.

a) Es ist $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$. Die Nullstellen des quadratischen Polynoms bestimmt man z.B. mit einer der Lösungsformeln für quadratische Gleichungen zu

$$3x^2 + 6x - 9 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 2x - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 3} = -1 \pm 2\,.$$

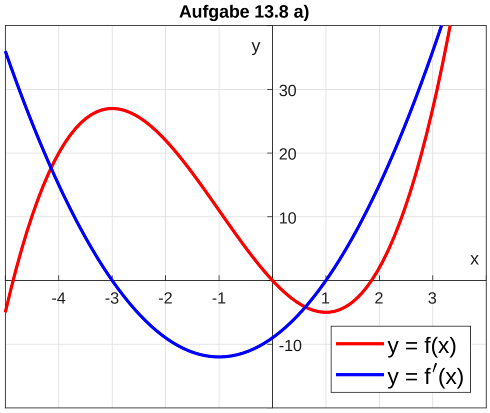
Also hat der Graph von f waagerechte Tangenten an den Stellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 1$.

b) Es ist $f'(x) = -2\sin(2x)$. Die Nullstellen bestimmt man aus den bekannten Nullstellen der Sinusfunktion:

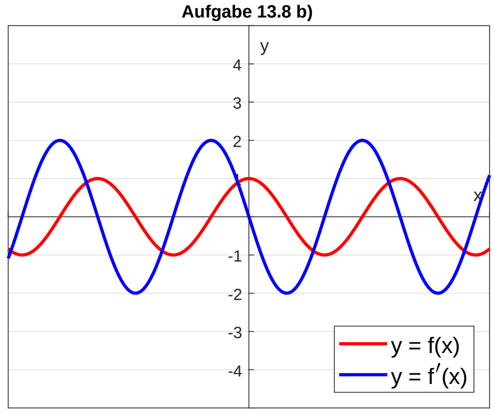
$$-2 \cdot \sin(2x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin(2x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x = k \cdot \pi \;\Leftrightarrow\; x = k \cdot \frac{\pi}{2}\,,\ \text{ mit } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Das heißt, der Graph von f hat waagerechte Tangenten an allen Stellen $x_k = k \cdot \frac{\pi}{2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 13.8 a)



Aufgabe 13.8 b)



13.9

a) Beispielhaft für den roten Funktionsgraphen (von links kommend): Die Funktion ist zunächst streng monoton fallend bis zum Minimum, dann streng monoton wachsend bis zum Maximum, ab dann wieder streng monoton fallend.

b) Der rote Graph gehört zu f, der blaue zu f' und der grüne zu f''. Man kann sich das z.B. klarmachen, indem man die Stellen sucht, an denen ein Funktionsgraph eine waagerechte Tangente hat; die dazugehörige Ableitungsfunktion muss dort jeweils eine Nullstelle haben. Auch der Zusammenhang zwischen Vorzeichen der Ableitungsfunktion f' und der Monotonie von f kann zur Argumentation genutzt werden.

c) Beispielhaft für das Paar $(f; f')$: Man sieht, dass die Nullstellen von f' mit den Extremstellen von f überein stimmen. Ist f' (blau) positiv, ist f (rot) streng monoton wachsend; ist f' dagegen negativ, ist f streng monoton fallend.

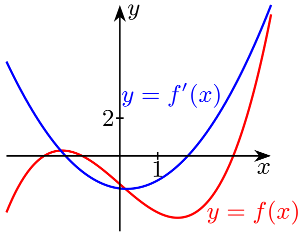
d) Man sieht, dass die Nullstellen von f'' mit den Wendestellen von f überein stimmen. Ist f'' (grün) positiv, ist der Graph von f (rot) linksgekrümmt; ist f'' dagegen negativ, ist der Graph von f rechtsgekrümmt. Der Graph von f hat im dargestellten Bereich drei Wendepunkte, die an den Nullstellen von f'' zu erkennen sind.

◀

13.10 Um die Skizze zu erstellen (qualitativ), sollte man sich klarmachen:

- Wo hat der Graph von f waagerechte Tangenten (Nullstellen der Ableitung)?
- Wo ist die Ableitung von f positiv, wo negativ?
- Wo nimmt die Steigung des Graphen von f zu, wo nimmt sie ab (wachsende bzw. fallende Ableitungsfunktion)?
- Wo sind Wendepunkte (entsprechen den Extrema der 1. Ableitung)?

Unter der Annahme, dass f ein Polynom ist, kann man sogar die Funktionsgleichung aufstellen und die Ableitungsfunktion ausrechnen - das war hier aber nicht gemeint.



13.11

a) Es ist $f'(x) = 6x^2 - 18x - 24$ mit Nullstellen in $x_1 = 4$ und $x_2 = -1$.

Bereich	f' ist hier	f ist hier
$x < -1$	positiv	str. mon. wachsend
$-1 < x < 4$	negativ	str. mon. fallend
$x > 4$	positiv	str. mon. wachsend

b) Es ist $f'(x) = 3x^2 - 12$ mit Nullstellen in $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$.

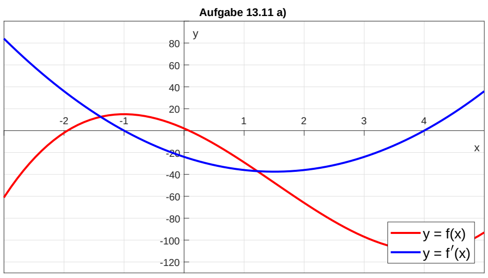
Bereich	f' ist hier	f ist hier
$x < -2$	positiv	str. mon. wachsend
$-2 < x < 2$	negativ	str. mon. fallend
$x > 2$	positiv	str. mon. wachsend

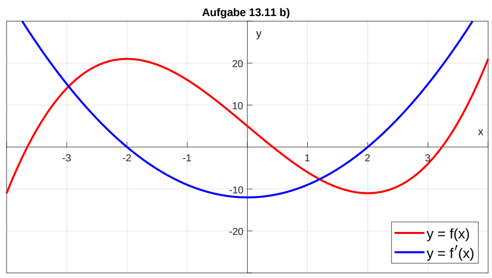
c) Es ist $f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$ mit einer Nullstelle in $x = 0$.

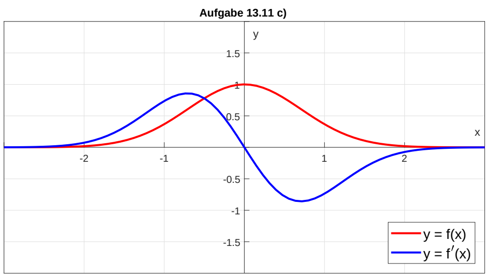
Bereich	f' ist hier	f ist hier
$x < 0$	positiv	str. mon. wachsend
$x > 0$	negativ	str. mon. fallend

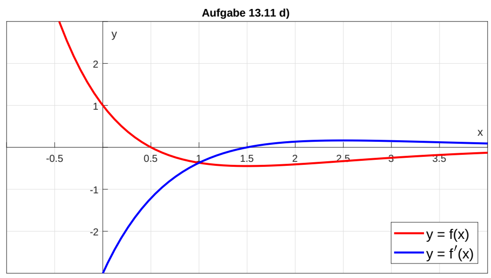
d) Es ist $f'(x) = (2x - 3) \cdot e^{-x}$ mit einer Nullstelle in $x = 1{,}5$.

Bereich	f' ist hier	f ist hier
$x < 1{,}5$	negativ	str. mon. fallend
$x > 1{,}5$	positiv	str. mon. wachsend









13.12 Man braucht

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2-4) \ = \ 0 \text{ für } x \in \{0; -2; 2\}\,,$$
$$f''(x) = 12x^2 - 16 = 4(3x^2-4) \ = \ 0 \text{ für } x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\,.$$

Zunächst untersucht man das Wachstumsverhalten:

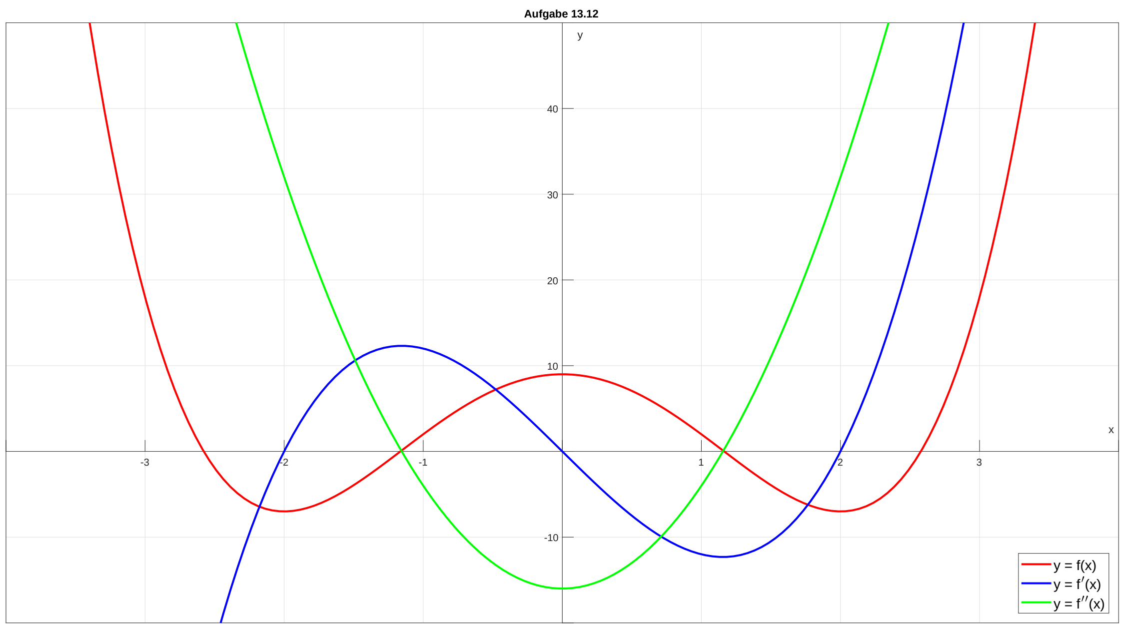
Bereich	f' ist hier	f ist hier
$x < -2$	negativ	str. mon. fallend
$-2 < x < 0$	positiv	str. mon. wachsend
$0 < x < 2$	negativ	str. mon. fallend
$x > 2$	positiv	str. mon. wachsend

f' hat also an jeder der drei Nullstellen von f' auch einen Vorzeichenwechsel. Es handelt sich also um Extremstellen. Der Graph hat Tiefpunkte in $T_1(-2|-7)$ und $T_2(2|-7)$ und einen Hochpunkt in $H(0|9)$.

Das Vorzeichen von f'' ändert sich jeweils in den beiden Nullstellen, da f'' eine nach oben geöffnete Parabel ist. In beiden Nullstellen von f'' hat der Graph von f also Wendepunkte. Für das Krümmungsverhalten ergibt sich:

Bereich	f'' ist hier	f ist hier
$x < -\frac{2}{\sqrt{3}}$	positiv	linksgekrümmt
$-\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$	negativ	rechtsgekrümmt
$x > \frac{2}{\sqrt{3}}$	positiv	linksgekrümmt

Zur Veranschaulichung dient das folgende Schaubild:



13.13

a) Man berechnet die Ableitungen zu

$$f'(x) = 3x^2 - 18x\,,\ f''(x) = 6x - 18\,.$$

Die zweite Ableitung $f''(x) = 6x - 18$ hat eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel in $x = 3$.

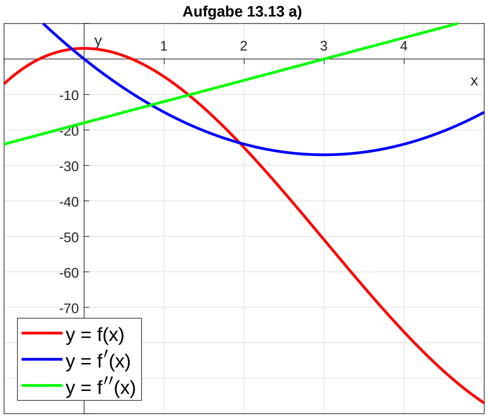
Bereich	f'' ist hier	f ist hier
$x < 3$	negativ	rechtsgekrümmt
$x > 3$	positiv	linksgekrümmt

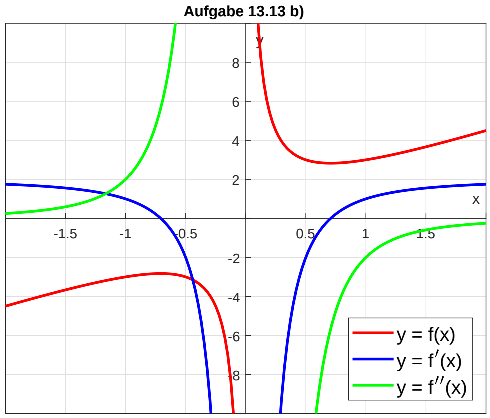
b) Man berechnet die Ableitungen zu

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{x^2}\,,\; f''(x) = \frac{2}{x^3}\,.$$

Die zweite Ableitung hat keine Nullstelle, ist aber für $x = 0$ nicht definiert.

Bereich	f'' ist hier	f ist hier
$x < 0$	negativ	rechtsgekrümmt
$x > 0$	positiv	linksgekrümmt





c) Man berechnet die Ableitungen mit Produkt- und Kettenregel zu

$$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}\,,\; f''(x) = -2 \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} = (4x^2 - 2) \cdot e^{-x^2}\,.$$

Die zweite Ableitung $f''(x) = (4x^2 - 2) \cdot e^{-x^2} = 0$ genau dann, wenn $4x^2 - 2 = 0$ ist (Nullprodukt). Sie hat also zwei Nullstellen mit Vorzeichenwechsel in $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

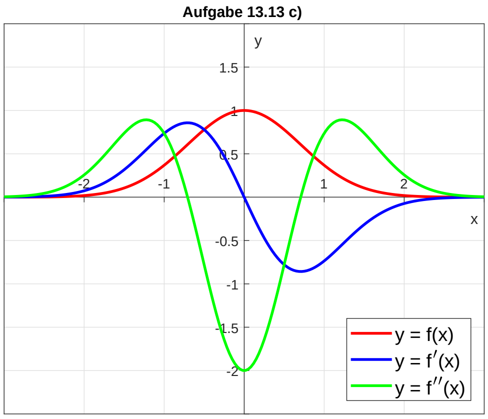
Bereich	f'' ist hier	f ist hier
$x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$	positiv	linksgekrümmt
$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$	negativ	rechtsgekrümmt
$x > \frac{1}{\sqrt{2}}$	positiv	linksgekrümmt

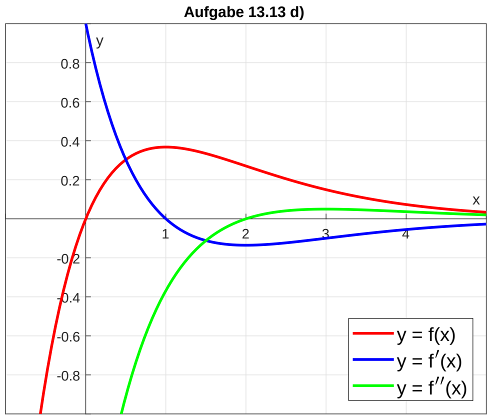
d) Man berechnet die Ableitungen mit Produkt- und Kettenregel zu

$$f'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = (1 - x) \cdot e^{-x}\,,\; f''(x) = -e^{-x} - (1 - x) \cdot e^{-x} = (x - 2) \cdot e^{-x}\,.$$

Die zweite Ableitung $f''(x) = (x - 2) \cdot e^{-x} = 0$ genau dann, wenn $x - 2 = 0$ ist (Nullprodukt). Sie hat also eine Nullstelle und einen Vorzeichenwechsel in $x = 2$.

Bereich	f'' ist hier	f ist hier
$x < 2$	negativ	rechtsgekrümmt
$x > 2$	positiv	linksgekrümmt





e) Man berechnet die erste Ableitung mit Produktregel zu

$$f'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1\,,\; f''(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Die zweite Ableitung hat keine Nullstelle, ist aber für $x = 0$ nicht definiert. Da der natürliche Logarithmus nur für $x > 0$ definiert ist, muss auch nur dieser Bereich betrachtet werden:

Bereich	f'' ist hier	f ist hier
$x > 0$	positiv	linksgekrümmt

f) Man berechnet die Ableitungen mit Kettenregel zu

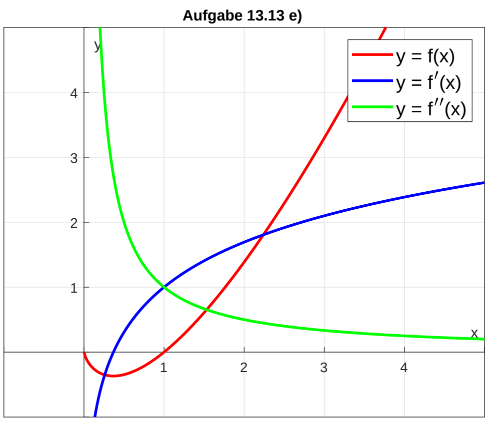
$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x)\,,\; f''(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x)\,.$$

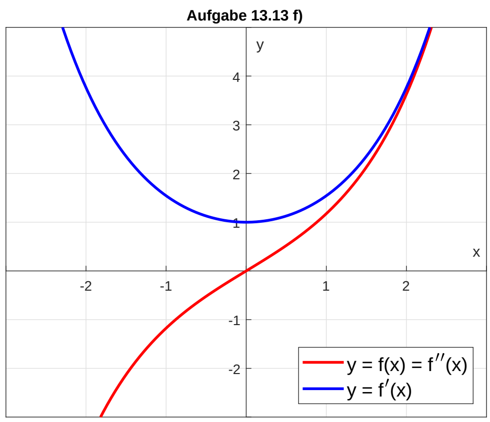
Die zweite Ableitung hat eine Nullstelle in $x = 0$, wie man folgendermaßen berechnen kann:

$$f''(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^x = e^{-x} \quad\Leftrightarrow\quad e^{2x} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad 2x = 0$$

Daraus ergibt sich das Krümmungsverhalten

Bereich	f'' ist hier	f ist hier
$x < 0$	negativ	rechtsgekrümmt
$x > 0$	positiv	linksgekrümmt





◀

13.14 Zur Bestimmung von globalen Extrema in einem Intervall muss man neben den lokalen Extrema auch die Werte der zu optimierenden Funktion in den Rändern des Intervalls untersuchen.

Für diese Anwendung sind nur Winkel $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$ relevant. Zunächst bestimmt man die lokalen Extrema der Funktion W in diesem Intervall.

Es ist $W'(\alpha) = \frac{2}{g} \cdot v_0^2 \cos(2\alpha) = 0$ genau dann, wenn $\cos(2\alpha) = 0$, also wenn $2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Da uns für diese Anwendung nur Winkel zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ interessieren, kommt nur $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$ in Frage.

Man überprüft, ob für $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$ tatsächlich ein Extremum vorliegt, indem man z. B. den Wert in die zweite Ableitung einsetzt:

$$W''(\alpha) = -\frac{4}{g} \cdot v_0^2 \sin(2\alpha) \;\Rightarrow\; W''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4}{g} \cdot v_0^2 < 0$$

Daher liegt in $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ein lokales Maximum vor. Da in den Randpunkten des Intervalls $W(0) = W\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ist, ist es gleichzeitig das globale Maximum für $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

Die maximale Weite beträgt $W\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{g} \cdot v_0^2$. ◀

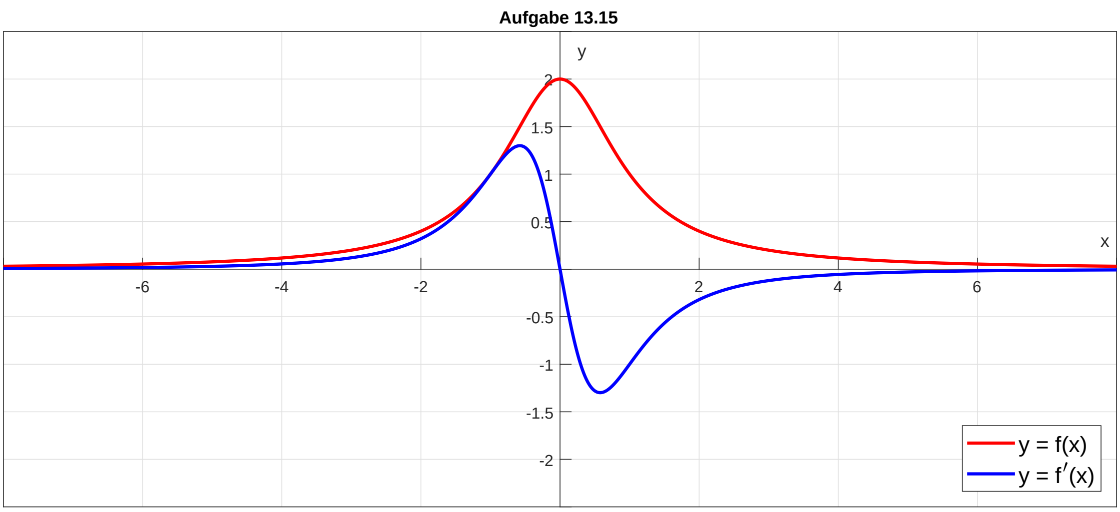
13.15 Die Ableitung

$$f'(x) = -4x \cdot \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

ist Null nur für $x_0 = 0$. Vorzeichenbetrachtung: Da der Nenner wegen $x^2 + 1 > 0$ immer positiv ist, hängt das Vorzeichen von f' nur vom Faktor $(-4x)$ ab:

für $x < 0$	für $x > 0$
$-4x > 0$	$-4x < 0$
$f'(x)$ positiv	$f'(x)$ negativ

Also liegt bei $x_0 = 0$ ein Vorzeichenwechsel von positiv nach negativ und damit ein lokales Maximum mit dem Maximalwert $f(0) = 2$ vor.



Weitere lokale Extrema gibt es nicht. Dem Schaubild des Funktionsgraphen entnimmt man, dass die Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs gegen Null strebt:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2+1} = 0.$$

Ein globales Minimum gibt es nicht. Alle Funktionswerte sind aber positiv und nähern sich dem Wert Null an.

Da die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist, ist der Wertebereich $W_f =]0; 2]$. ◀

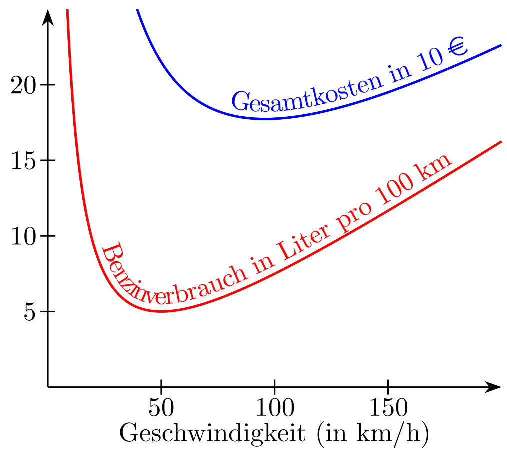
13.16 Die Fahrgeschwindigkeit ist positiv, also muss $x > 0$ sein.

a) Es ist $f'(x) = \frac{1}{10} - 250 \cdot \frac{1}{x^2}$ mit einer positiven Nullstelle in $x = 50$ km/h. Durch Einsetzen in die zweite Ableitung $f''(x) = 500 \cdot \frac{1}{x^3}$ sieht man, dass es sich um ein Minimum handelt, mit dem Minimalverbrauch $y_{\text{min}} = 5$ Liter pro 100 km, der an den Rändern nicht unterboten werden kann.

b) Kostenfunktion K mit

$$\begin{aligned} K(x) &= 6 \cdot 1{,}50 \cdot y(x) + 50 + 10 \cdot \frac{600}{x} \\ &= 9\left(\frac{x}{10} - 5 + \frac{250}{x}\right) + 50 + \frac{6000}{x} \\ &= \frac{9}{10}x + 5 + \frac{8\,250}{x} \end{aligned}$$

c) Gesucht ist die Geschwindigkeit x, die K minimiert. Es ist $K'(x) = \frac{9}{10} - 8\,250 \cdot \frac{1}{x^2}$ mit einer positiven Nullstelle in $x_1 = \frac{\sqrt{82\,500}}{3} = 95{,}743$ km/h. Durch Einsetzen in die zweite Ableitung $K''(x) = 16\,500 \cdot \frac{1}{x^3}$ sieht man, dass es sich um ein Minimum handelt mit Minimalkosten von $K_{\text{min}} = 177{,}3369 \approx 177{,}34$ in Euro.



◀

13.17 Volumen und Oberfläche eines Kreiszylinders sind bekannt (siehe auch Kapitel 11):

$$V = \pi r^2 h, \quad O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

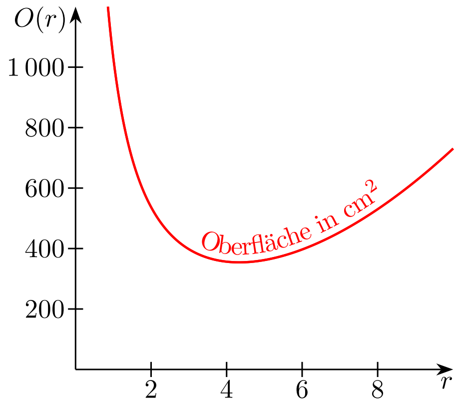
Da das Volumen vorgegeben ist, kann man eine der beiden Variablen eliminieren:

$$\begin{aligned} & h = h(r) = \frac{1}{\pi r^2} \cdot V \\ \Rightarrow \quad & O(r) = O = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r} \end{aligned}$$

Von dieser Funktion suchen wir ein Minimum. Es ist

$$\begin{aligned} O'(r) &= 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^3 = \frac{V}{2\pi} \\ O''(r) &= 4\pi + \frac{4V}{r^3} > 0. \end{aligned}$$

Also handelt es sich um ein Minimum.



Die optimale Dose (Volumen von $V = 512\,\text{ml}$) hat also einen Radius von $r = \frac{8}{\sqrt[3]{2\pi}} \approx 4{,}3354\,\text{cm}$ und eine Höhe von $h = \frac{V}{\pi r^2} = 2r \approx 8{,}6708\,\text{cm}$, und damit einen quadratischen Längsschnitt. Die minimale Oberfläche ist dann $O = 6\pi r^2 \approx 354{,}29\ \text{cm}^2$. ◀