Grenzwerte gebrochenrationaler Funktionen für $x \to \pm\infty$

Betrachtet man eine gebrochenrationale Funktion r mit

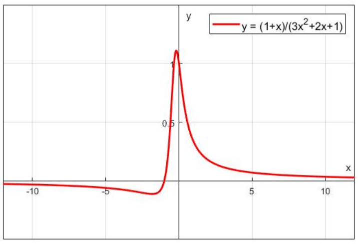
$$r(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)} = \frac{a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0},$$

wobei p_m ein Polynom m-ten Grades und q_n ein Polynom n-ten Grades ist, dann hängt ihr Grenzwertverhalten für $x \to \pm\infty$ wesentlich von den Polynomgraden m und n ab.

Beispiel 1 Die Funktion r mit $r(x) = \frac{1+x}{3x^2+2x+1}$ hat im Zähler den Grad $m = 1$ und im Nenner den höheren Grad $n = 2$. Um den Grenzwert zu bestimmen, kann man in Zähler und Nenner die höchste Potenz des Nenners (hier: x^2) ausklammern und anschließend kürzen:

$$r(x) = \frac{1+x}{3x^2+2x+1} = \frac{x^2 \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)}{x^2 \cdot \left(3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}{3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{0+0}{3+0+0} = 0$$

Beide Summanden im Zähler streben für $x \to \pm\infty$ gegen null, weil man jeweils den Kehrwert der unbeschränkt wachsenden Werte von x bzw. x^2 bildet. Aus demselben Grund streben im Nenner die hinteren beiden Summanden gegen null; die Konstante 3 sorgt dafür, dass der Nenner im Grenzwert ungleich null und der Quotient definiert ist.



Somit streben auch die Funktionswerte von r für $x \to \infty$ gegen null. Entsprechendes gilt für $x \to -\infty$. Auch im Schaubild der Funktion wird dieses Verhalten deutlich. ◀

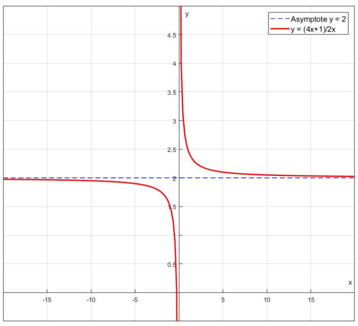
Man spricht von der Kurve $y = g(x)$ als einer **Asymptote** des Graphen von r für $x \to \pm\infty$, wenn sich die Kurven einander unendlich dicht annähern, das heißt, wenn der Abstand $|g(x) - r(x)|$ zwischen beiden Kurven für $x \to \pm\infty$ gegen null strebt.

Beispiel 2 Bestimmen Sie Grenzwerte und Asymptote der Funktion r mit $r(x) = \frac{4x+1}{2x}$, mit $x \neq 0$, für $x \to \pm\infty$.

Die Funktion r hat in Zähler und Nenner denselben Polynomgrad $m = n = 1$. Formt man den Funktionsterm um, erhält man

$$r(x) = \frac{4x+1}{2x} = 2 + \frac{1}{2x}.$$

Für $x \to \pm\infty$ strebt der Kehrwert $\frac{1}{2x}$ gegen null, und damit auch der Abstand des Funktionsgraphen zur waagerechten Geraden $y = 2$.
Das Schaubild der Funktion zeigt dieses Verhalten. Der Graph der Funktion r hat als waagerechte Asymptote für $x \to \pm\infty$ die Gerade $y = 2$. Die Funktionswerte von r streben dann gegen den Wert 2.



Man schreibt auch: $\lim_{x\to\infty} r(x) = 2$ und $\lim_{x\to-\infty} r(x) = 2$.

Der Vollständigkeit halber sei angemerkt, dass die senkrechte Gerade $x = 0$ ebenfalls eine Asymptote des Graphen von r ist, für $x \to 0$ (nach der aber nicht gefragt war). Die Stelle

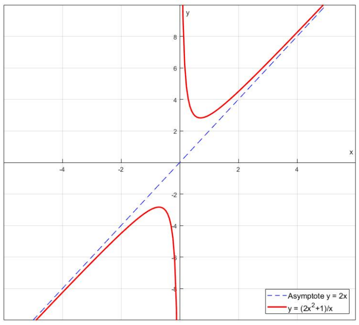
$x_0 = 0$, in der die Funktion r nicht definiert ist, nennt man auch eine **Polstelle** der Funktion r.
◀

Beispiel 3 Bestimmen Sie Grenzwerte und Asymptote der Funktion r mit $r(x) = \frac{2x^2+1}{x}$, mit $x \neq 0$, für $x \to \pm\infty$.

Die Funktion hat im Zähler den Grad $m = 2$ und im Nenner den kleineren Grad $n = 1$. Formt man den Funktionsterm um, erhält man

$$r(x) = \frac{2x^2+1}{x} = 2x + \frac{1}{x}\,.$$

Für $x \to \pm\infty$ strebt der Quotient $\frac{1}{x}$ gegen null, aber die Werte von $2x$ streben wie x gegen $\pm\infty$. Damit streben die Funktionswerte von r gegen $+\infty$ für $x \to +\infty$, und gegen $-\infty$ für $x \to -\infty$.



Auch im Schaubild der Funktion wird dieses Verhalten deutlich. Den zweiten Summanden $\frac{1}{x}$ kann man auch als vertikalen Abstand zwischen dem Funktionsgraphen von r und der Gerade $y = 2x$ interpretieren, an der Stelle x. Deshalb hat der Graph der Funktion r als schräge Asymptote die Gerade $y = 2x$. ◀

Obwohl eine Funktion, deren Werte gegen $\pm\infty$ streben, keinen Grenzwert (im Sinne einer Zahl) hat, ist es an Hochschulen üblich, auch für diesen Fall verallgemeinernd die Limes-Schreibweise zu benutzen. Man schreibt dann

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = +\infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\to\infty} r(x) = -\infty$$

und spricht vom **uneigentlichen Grenzwert** der Funktion r für $x \to \infty$. *Uneigentlich* meint in diesem Fall soviel wie *verallgemeinernd* oder *nicht im klassischen Sinn*.

Wendet man das Vorgehen aus Beispiel 1 auf eine beliebige gebrochenrationale Funktion r an, so kann man die bisherigen Überlegungen folgendermaßen verallgemeinern. Ist $m > n$, so streben die Funktionswerte von r für $x \to \infty$ gegen ∞ oder $-\infty$. Ist $m < n$, so streben die Funktionswerte von r gegen null. Sind die Polynomgrade von Zähler und Nenner gleich, dann streben die Funktionswerte von r für $x \to \pm\infty$ gegen das Verhältnis $\frac{a_m}{b_n}$.

Zusammenfassung

	$m < n$	$m = n$	$m > n$
Grenzwert für $x \to \pm\infty$	0	$\frac{a_m}{b_n}$	$+\infty$ oder $-\infty$
Asymptote	x-Achse $y = 0$	Parallele zur x-Achse $y = \frac{a_m}{b_n}$	Graph des ganzrationalen Anteils $y = g_{m-n}(x)$

Im Allgemeinen bestimmt man den ganzrationalen Anteil einer gebrochenrationalen Funktion r, deren Zählergrad größer ist als der Nennergrad, mit Hilfe der Polynomdivision (siehe hierzu das Zusatzmaterial zu Kapitel 12).

Aufgabe 1 Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten und bestimmen Sie die Asymptoten für $x \to \pm\infty$, für die folgenden Funktionen r mit

a) $r(x) = \dfrac{5x+10}{x^2}$, $x \neq 0$

b) $r(x) = \dfrac{x^3-1}{2x^2}$, $x \neq 0$

c) $r(x) = \dfrac{3x^2-1}{x^2+1}$

d) $r(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $x \neq 1$

Stellen Sie die Funktionen mit einem elektronischen Hilfsmittel grafisch dar und nutzen Sie das Schaubild für die Untersuchung.

Lösung 1 Die Schaubilder der Funktionen und ihrer Asymptoten finden Sie am Ende der Lösung.

a) Da der Grad im Nenner größer ist als der Grad im Zähler, nähern sich die Werte von r für $x \to \pm\infty$ der null und der Graph der Funktion der x-Achse an, die eine waagerechte Asymptote bildet. Rechnerisch kann man den Grenzwert z.B. folgendermaßen bestimmen:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x+10}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{5}{x} + \frac{10}{x^2}\right) = 5 \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + 10 \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Die Kehrwerte $\frac{1}{x}$ bzw. $\frac{1}{x^2}$ streben gegen null, wenn $x \to \infty$ geht. Analog berechnet man den Grenzwert für $x \to -\infty$.

b) Da der Grad im Zähler größer ist als der Grad im Nenner, gehen die Werte von r für $x \to +\infty$ gegen $+\infty$ und für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$. Die Vorzeichen ergeben sich hier aus der Differenz der Grade in Zähler und Nenner, die eine ungerade Zahl ist, und dem Vorzeichen der Koeffizienten:

$$\frac{x^3-1}{2x^2} = \frac{x^3}{2x^2} - \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x^2}$$

Da der zweite Summand gegen null geht, für $x \to \pm\infty$, bestimmt der vordere Summand das Verhalten der Funktion für große x. Wie man auch im Schaubild sieht, gibt es eine schräge Asymptote mit $y = \frac{1}{2}x$.

c) Hier sind die Grade in Zähler und Nenner gleich. Die Werte der Funktion nähern sich dem Verhältnis der führenden Koeffizienten an, es ist $\lim_{x\to\pm\infty} r(x) = 3$, und $y = 3$ ist eine waagerechte Asymptote.

Rechnerisch kann man das herausfinden, indem man den Zähler soweit ergänzt, dass man den Nenner gut kürzen kann. Man erhält:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2-1}{x^2+1} &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+3-3-1}{x^2+1} \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{4}{x^2+1}\right) \\ &= 3 - \underbrace{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x^2+1}}_{=0} = 3\end{aligned}$$

Der Ausdruck $\frac{4}{x^2+1}$ beschreibt an der Stelle x den vertikalen Abstand zwischen dem Graphen der Funktion r und der waagerechten Asymptote $y = 3$.

d) Man erkennt im Zähler ein Binom und kann für alle $x \neq 1$ kürzen: $r(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = x + 1$. Damit sind die Funktionswerte von r bis auf die Stelle $x = 1$ überall dieselben wie die Werte von g mit $g(x) = x + 1$.

Wenn $x \to +\infty$ strebt, strebt auch $x+1$ gegen $+\infty$, es ist also $\lim_{x\to+\infty} r(x) = +\infty$. Analog ist $\lim_{x\to-\infty} r(x) = -\infty$.

Man kann die Gerade $y = x + 1$ als schräge Asymptote ansehen, auch wenn sich die Graphen von r und g mit der Gleichung $g(x) = x + 1$ nur in dem einzigen Punkt $P(1|2)$ unterscheiden.