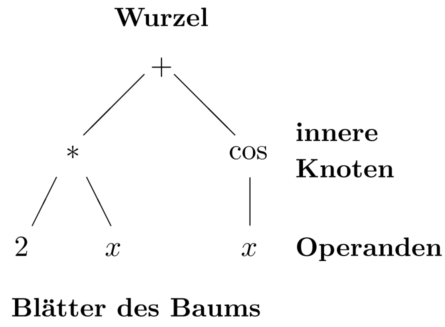
Baumstruktur von Termen

Bei mehrfach zusammengesetzten Funktionsausdrücken kann es unübersichtlich werden, in welcher Reihenfolge welche Ableitungsschritte auszuführen sind. Um die Struktur eines Terms zu verstehen, kann die Darstellung des Terms als Baum hilfreich sein.

Eigenschaften von Termbäumen

Termbäume sind Graphen, sie bestehen aus Knoten und Kanten.

- Knoten, von denen keine Kanten ausgehen, nennt man **Blätter**. Sie entsprechen den nicht weiter zerlegbaren **Operanden**, also Variablen oder Konstanten.
- Knoten, von denen weitere Äste ausgehen, nennt man **innere Knoten**. Jeder innere Knoten entspricht einem **Operator**, also einem Rechenzeichen aus $\{+, -, *, /\}$ oder einer Funktion.
- Aus einem inneren Knoten können nur ein oder zwei Kanten ausgehen.



Beispiel:
Termbaum für den Term $2x + \cos(x)$

Klammern müssen im Baum nicht dargestellt werden, weil allein die Struktur die Reihenfolge der Berechnung vorgibt. Es kann zu einem Term auch mehrere äquivalente Baumdarstellungen geben, wenn die Reihenfolge der Berechnungen vertauschbar ist.

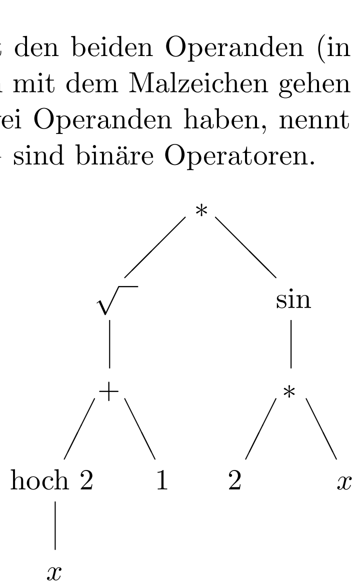
Beispiel 1 Wir beginnen mit einem Beispiel aus dem Arbeitsbuch. Dort war die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x^2+1} \cdot \sin(2x)$ zu bestimmen.

Zum Aufbau des Baums beginnt man mit der Operation, die man bei der Berechnung des Terms als letztes ausführen würde. Der entsprechende Operator steht ganz oben und bildet die **Wurzel** des Baums. (Im Gegensatz zu den Vorbildern aus der Pflanzenwelt wachsen diese Bäume von oben nach unten.)

Hier ist die Multiplikation die letzte auszuführende Operation, mit den beiden Operanden (in diesem Fall Faktoren) $\sqrt{x^2+1}$ und $\sin(2x)$. Aus dem Wurzelknoten mit dem Malzeichen gehen also zwei Kanten zu den Operanden ab. Operatoren, die immer zwei Operanden haben, nennt man auch **binäre Operatoren**. Die Rechenzeichen aus $\{+; -; *; /\}$ sind binäre Operatoren.

Beide Operanden sind verkettete Funktionsterme, die wir ebenfalls von außen nach innen schrittweise zerlegen.

Der rechte Faktor $\sin(2x)$ hat als äußere Funktion eine Sinusfunktion, angewendet auf den Term $2x$. Aus dem Knoten, der die Sinusfunktion bezeichnet, geht also eine einzige Kante zu dem Operanden (Argument) $2x$ heraus. Funktionen haben nur ein einziges Argument, es sind **unäre Operatoren**. Der Term $2x$ wiederum entspricht einer Multiplikation einer Konstanten mit der Variable x. Diese Operanden lassen sich nicht weiter zerlegen; es sind Blätter des Baums.



Analog zerlegt man den linken Faktor $\sqrt{x^2+1}$. Es entsteht der abgebildete Baum, der die

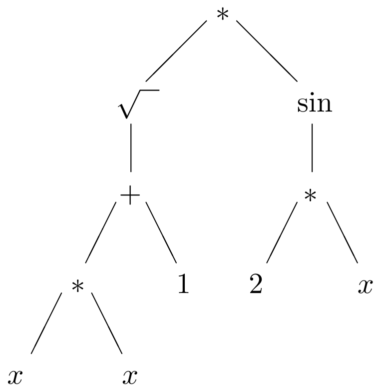
Struktur des Funktionsterms visualisiert.

Hat man die Struktur eines Funktionsterms derart analysiert, lässt sich aus dem Baum die Reihenfolge der anzuwendenden Ableitungsregeln von oben nach unten ablesen:

1. Die Wurzel des Baums ist eine Multiplikation, zuerst ist also die Produktregel anzuwenden.
2. In der nächsten Ebene des Baums stehen Funktionsaufrufe; es handelt sich um Verkettungen. Für die Ableitung beider Faktoren benötigt man die Kettenregel.
3. In der dritten Ebene finden wir links ein $+$ (Summenregel), rechts ein $*$ mit einem konstanten Operanden (Faktorregel).
4. In der vierten Ebene steht mit der Potenz wieder eine Funktion, deren Argument die Variable x ist. Man benötigt also schlicht die Ableitung der entsprechenden elementaren Funktion: $(x^2)' = 2x$.

Eine äquivalente Darstellung desselben Terms benutzt für die Zerlegung von $x^2 = x \cdot x$ in der untersten Ebene eine Multiplikation zweier Variablen. Das würde einer Anwendung der Produktregel entsprechen:

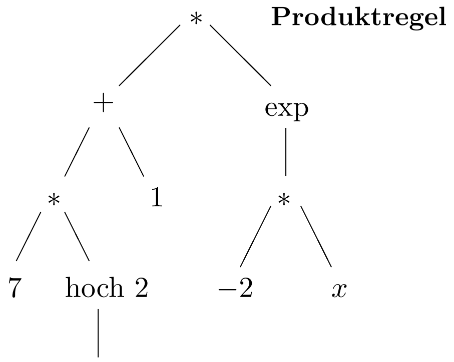
$$(x^2)' = (x \cdot x)' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$$

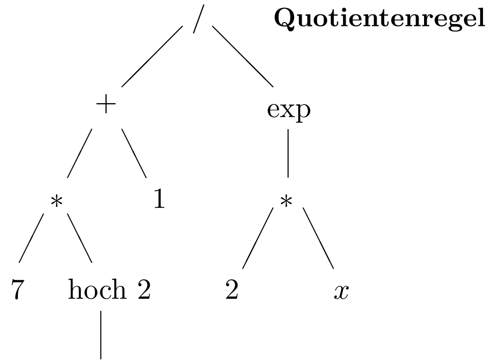


In der Praxis helfen die Bäume zwar sehr beim Verständnis der Struktur von zusammengesetzten Termen, man wird sich aber in der Regel nicht die Mühe machen, den Baum vor dem Ableiten zu zeichnen. Beim automatisierten Lesen und Interpretieren von Formelausdrücken durch einen Computer finden Termbäume als interne Datenstruktur Anwendung.

Beispiel 2 Für viele Funktionsausdrücke gibt es mehrere äquivalente Termbäume, die äquivalenten Reihenfolgen der Ableitungsschritte entsprechen.

Wir betrachten die Funktion f mit $f(x) = (7x^2 + 1) \cdot e^{-2x}$, deren Funktionsterm man auch in Form eines Quotienten als $f(x) = \frac{7x^2+1}{e^{2x}}$ schreiben kann. Das führt auf die folgenden äquivalenten Termbäume (exp steht hier für die Exponentialfunktion):

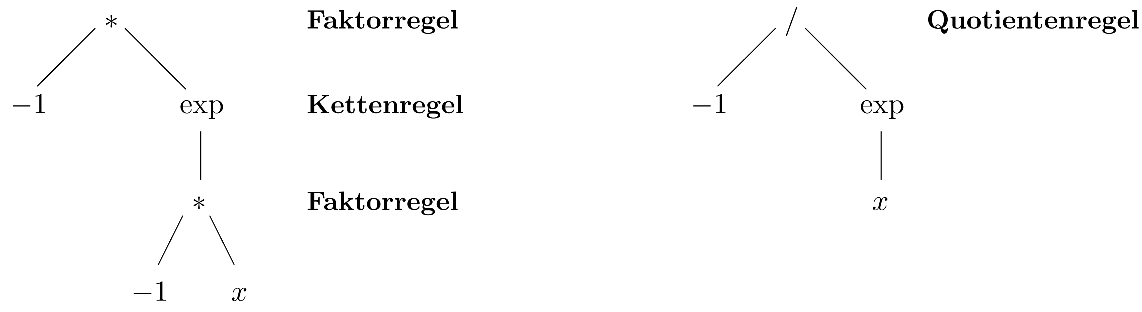




Bei Verwendung des linken Baumes würde man für die Ableitung im ersten Schritt mit der Produktregel arbeiten, bei der Verwendung des rechten Baums jedoch mit der Quotientenregel.

Beispiel 3 Eine Ausnahme unter den Operanden (Rechenoperationen) aus $\{+, -, *, /\}$ stellt das Minus dar, das es nicht nur mit zwei Argumenten, sondern auch als **unäres Minus** mit einem einzigen Operanden gibt, wie z. B. in dem Funktionsterm $f(x) = -e^{-x}$. Das unäre Minus kann man als abkürzende Schreibweise für die Multiplikation mit (-1) verstehen. Dann macht es auch beim Aufbau von Termbäumen keinerlei Schwierigkeiten mehr.

Im Fall der Exponentialfunktion kann man natürlich alternativ mithilfe der Rechenregeln äquivalent umformen. Das führt auf die äquivalenten Termbäume für $f(x) = (-1) \cdot e^{(-1)\cdot x} = \frac{-1}{e^x}$:



Aufgabe 1 Skizzieren Sie einen Termbaum für die folgenden Funktionsterme, und identifizieren Sie die entsprechende Reihenfolge von Ableitungsschritten:

a) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

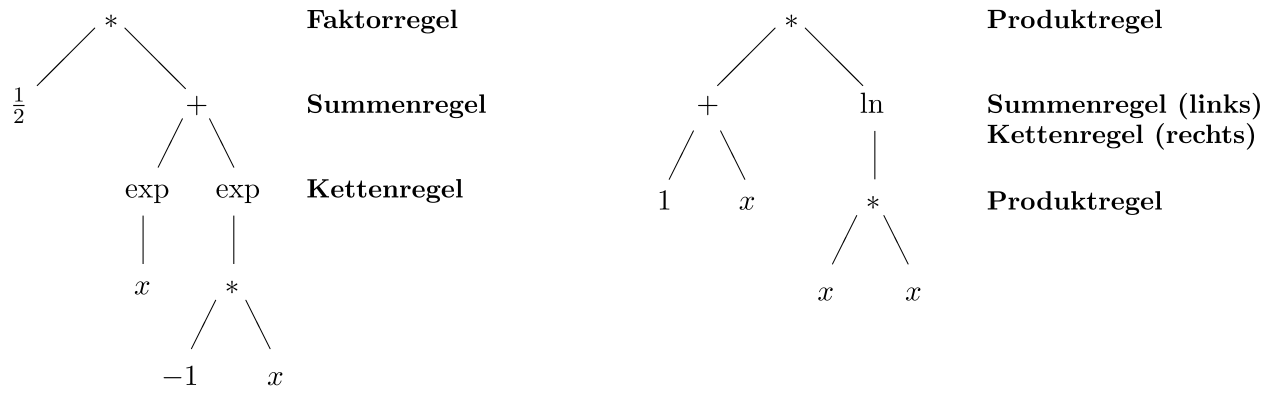
b) $f(x) = (x+1) \cdot \ln(x^2)$

Aufgabe 2 Skizzieren Sie mindestens 3 äquivalente Termbäume für die Funktion f mit

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot e^{-2x}$$

Identifizieren Sie für sich jeweils die entsprechende Reihenfolge von Ableitungsschritten. Bilden Sie die Ableitung der Funktion.

Lösung 1 Mögliche Termbäume könnten sein (links für a) und rechts für b)):



Lösung 2 Diesen Term kann man auf vielfältige Weise äquivalent umformen, z.B.:

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot e^{-2x} = \frac{x^2 + 2x + 1}{e^{2x}} = \frac{(x+1)^2}{e^{2x}} = \left(\frac{x+1}{e^x}\right)^2 = (x+1)^2 \cdot e^{-2x}$$

Äquivalente Terme führen zu äquivalenten Termbäumen. Unten finden Sie mögliche Alternativen (nicht vollzählig).

Die Ableitung der Funktion ist:

$$f'(x) = \left((x+1)^2 \cdot e^{-2x}\right)' = 2(x+1) \cdot e^{-2x} + (x+1)^2 \cdot (-2) \cdot e^{-2x} = -2x \cdot (x+1) \cdot e^{-2x}$$

Hier wurde mit der letzten Umformung sowie mit Produkt- und Kettenregel gearbeitet.