Umkehrfunktionen

Häufig ist es sinnvoll, aus dem gegebenem Bild einer Funktion das Urbild zu rekonstruieren.

Beispiel Ein Junge lässt von einem $H = 80\,\mathrm{m}$ hohen Turm einen Stein fallen. Wie lange dauert es, bis dieser Stein auf dem Boden aufschlägt?

Die Physik lehrt, dass ein zum Zeitpunkt $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ aus der Ruhe fallen gelassener Körper abhängig von der Zeit t die Strecke

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

mit der konstanten Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ zurücklegt. Wir haben also eine Funktion

$$s : t \mapsto s(t) = \frac{1}{2}gt^2,$$

welche jedem Zeitpunkt t die zurückgelegte Fallstrecke zuordnet. Zur Lösung der Aufgabe müssen wir für die Turmhöhe $s(t) = H = 80\,\mathrm{m}$ das zugehörige Urbild $t > 0$ suchen. Wir haben also die Gleichung

$$H = \frac{1}{2}gt^2$$

nach der Variablen t aufzulösen. Es ergibt sich

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80\,\mathrm{m}}{g}} \approx 4{,}04\,\mathrm{s},$$

d. h. nach etwas mehr als 4 Sekunden trifft der Stein auf der Erde auf. ◀

In diesem Beispiel benötigten wir mathematisch gesprochen die Umkehrfunktion der Funktion $s : t \mapsto s(t)$.
Allgemein können wir nur dann die Umkehrfunktion einer Funktion $f : x \mapsto f(x)$ bilden, wenn es zu jedem Bild $f(x)$ nur ein eindeutig bestimmtes Urbild x gibt. Derartige Funktionen nennt man **injektiv**. Genauer gilt:

Ist $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$ eine injektive Funktion mit dem Wertebereich W_f, so heißt die Funktion

$$f^{-1} : W_f \to D_f,$$

welche jedem $y = f(x)$ das eindeutig bestimmte Urbild x unter der Funktion f zuordnet, die **Umkehrfunktion** von f.

Achtung Bitte beachten Sie, dass hier die Hochstellung von -1 in f^{-1} nicht als Exponent aufzufassen ist, sondern eben die Umkehrfunktion von f symbolisiert. Es ist also $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$. Die üblicherweise mit $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ und $\tan^{-1}$ bezeichneten Tasten auf dem Taschenrechner bezeichnen entsprechend dieser Konvention auch die Umkehrfunktionen von sin, cos und tan.

Beispiel Wie lautet die Umkehrfunktion der folgenden injektiven Funktion?

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\backslash\{-3\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = \dfrac{2x-1}{x+3} \end{array}$$

Diese Funktion ist laut Aufgabe injektiv und kann demzufolge umgekehrt werden. Die Umkehrung erhalten wir dadurch, dass wir berechnen, wie sich das Urbild x unter der Funktion f aus dem Bild y berechnet. Dazu bilden wir folgende Äquivalenzkette:

$$\begin{array}{rl} & y = \dfrac{2x-1}{x+3} \\ \Leftrightarrow & y(x+3) = 2x-1 \\ \Leftrightarrow & yx + 3y = 2x - 1 \\ \Leftrightarrow & yx - 2x = -1 - 3y \\ \Leftrightarrow & x(y-2) = -(1+3y) \\ \Leftrightarrow & x = -\dfrac{1+3y}{y-2} = \dfrac{1+3y}{2-y} \end{array}$$

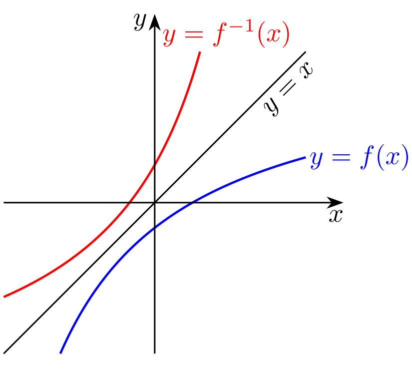
Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass $y \neq 2$ ist, da ansonsten die Gleichung $x(y-2) = -(1+3y)$ unsinnig ist. Das wiederum bedeutet, dass $y = 2$ nicht im Wertebereich W_f der Funktion f liegt. Letztendlich erhalten wir also als Abbildungsvorschrift der Umkehrfunktion

$$f^{-1} : y \mapsto x = \frac{1+3y}{2-y}.$$

Nun ist es üblich, in der Mathematik die unabhängige Variable einer Funktion, für die man alle Werte des Definitionsbereichs einsetzen darf, mit dem Buchstaben x zu bezeichnen. Folgt man dieser Konvention und vertauscht die Variablenbezeichnungen x und y, so erhält man letztendlich als Umkehrfunktion

$$f^{-1}: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\backslash\{2\} & \to & \mathbb{R}\backslash\{-3\} \\ x & \mapsto & y = \dfrac{1+3x}{2-x}. \end{array}$$

Die Vertauschung der Variablenbezeichnungen x und y bewirkt, dass sich der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} aus demjenigen der Funktion f durch Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden $y = x$ ergibt.



◄