Polynomdivision und Horner-Schema

Kennt man eine Nullstelle einer Polynomfunktion, kann man diese als Linearfaktor abspalten und erhält dadurch eine Polynomfunktion niedrigeren Grades, die man weiter untersuchen kann.

Beispiel Die Polynomfunktion f mit

$$f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 2$$

hat an der Stelle $x = 2$ eine Nullstelle. Wie lautet der Funktionsterm $g(x)$ der Polynomfunktion g im Produkt

$$f(x) = (x-2) \cdot g(x)?$$

Das Verfahren, das hier meistens zum Einsatz kommt, ist die sog. **Polynomdivision**. Diese orientiert sich an der schriftlichen Division von Zahlen.

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 \;\; + x^2 - 5x - 2\big) : \big(x-2\big) = x^2 + 3x + 1 \\
\underline{-\, x^3 + 2x^2} \\
\qquad\quad 3x^2 - 5x \\
\qquad \underline{-\, 3x^2 + 6x} \\
\qquad\qquad\qquad x - 2 \\
\qquad\qquad \underline{-\, x + 2} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Es wird die höchste Potenz der linken Seite durch die höchste Potenz der rechten Seite dividiert. Durch Rückmultiplikation des Ergebnisses mit dem kompletten Faktor $(x-2)$ ergibt sich ein Produkt, das vom ursprünglichen Polynom subtrahiert wird. Dieses Verfahren wird so lange wiederholt, bis sich im Idealfall der Rest 0 ergibt.

Durch Multiplikation des Nenners auf die andere Seite ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + x^2 - 5x - 2 \\ &= (x-2) \cdot (x^2 + 3x + 1), \end{aligned}$$

d. h. der gesuchte Funktionsterm lautet

$$g(x) = x^2 + 3x + 1.$$

$\blacktriangleleft$

Eine Formalisierung der Polynomdivision ergibt sich durch folgende Überlegung. Die Polynomfunktion f lässt sich umschreiben:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + x^2 - 5x - 2 \\ &= \big(x^2 + x - 5\big) \cdot x - 2 \\ &= ((x+1) \cdot x - 5) \cdot x - 2 \end{aligned}$$

Die Auswertung an einer Stelle $x_0 = 2$ erfolgt mit dieser Darstellung als

$$\begin{aligned} f(2) &= ((2+1) \cdot 2 - 5) - 2 \\ &= (3 \cdot 2 - 5) \cdot 2 - 2 \\ &= (6 - 5) \cdot 2 - 2 \\ &= 1 \cdot 2 - 2 \\ &= 2 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

bzw. nochmals anders geschrieben, sodass man die einzelnen Rechenschritte auch optisch nachvollziehen kann:

$$
\begin{array}{llllllll|l}
\Big((1 & & & & & & & & 1 \\
 & \cdot 2 & & & & & & & 2 \\
 & & +1) & & & & & & 3 \\
 & & & \cdot 2 & & & & & 6 \\
 & & & & +(-5)\Big) & & & & 1 \\
 & & & & & \cdot 2 & & & 2 \\
 & & & & & & +(-2) & & 0
\end{array}
$$

Diese Berechnung lässt sich im sog. **Horner-Schema** formalisieren:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 1 & -5 & -2 \\
2 & & 2 & 6 & 2 \\
\hline
 & 1 & 3 & 1 & 0
\end{array}
$$

In der obersten Zeile stehen die Koeffizienten der Polynomfunktion. Vor der zweiten Zeile steht durch den vertikalen Strich getrennt die Stelle, an der der Funktionsterm ausgewertet werden soll. Nun werden von links beginnend die obigen Schritte durchgeführt:

In der ersten Spalte steht die 1, die aufsummiert wiederum 1 in der dritten Zeile ergibt. Nun wird diese Zahl mit der auszuwertenden Stelle 2 multipliziert und in die zweite Zeile der zweiten Spalte des Schemas geschrieben. Es folgt die Summe mit 1 sowie die Multiplikation des Ergebnisses 3 mit 2, die resultierende 6 wird in die zweite Zeile der dritten Spalte geschrieben. Die neuerliche Summenbildung mit (-5) ergibt als Ergebnis 1, die Multiplikation mit der auszuwertenden Stelle 2 den Wert 2, der wieder in die zweite Zeile geschrieben wird, dieses Mal in der vierten und letzten Spalte. Die erneute Summenbildung mit (-2) liefert letztendlich den Funktionswert $f(-2) = 0$.

Bei der Polynomdivision ergab sich

$$f(x) = (x-2) \cdot (x^2 + 3x + 1).$$

Vergleicht man die Koeffizienten des quadratischen Polynoms mit den Zahlen in der letzten Reihe des Horner-Schemas vor dem Endergebnis 0, so stellt man fest, dass diese identisch sind. Das ist kein Zufall. Man kann sich überlegen, dass im Fall einer Nullstelle die Zahlen in der letzten Zeile des Horner-Schemas genau die Koeffizienten des nach der Polynomdivision verbleibenden Polynoms sind, d. h. in unserem Fall folgt aus der Reihenfolge

$$1 \quad 3 \quad 1 \quad (0)$$

die Identität

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 + x^2 - 5x - 2 \\
&= (x-2) \cdot (1 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1) \\
&= (x-2)\left(x^2 + 3x + 1\right).
\end{aligned}
$$

Aus dem Horner-Schema kann man also im Fall einer Nullstelle automatisch das Ergebnis der Polynomdivision ablesen.