Allgemeine Exponential- und Logarithmusfunktion

Die n-malige Multiplikation des positiven Faktors a

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} = a^n$$

kürzt man mit der Potenzschreibweise a^n ab. Durch Einführen der weiteren Potenzen

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a}^{\,m} \qquad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \qquad (m, n \in \mathbb{N}^*)$$

gelten allgemein die Potenzgesetze

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad (a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

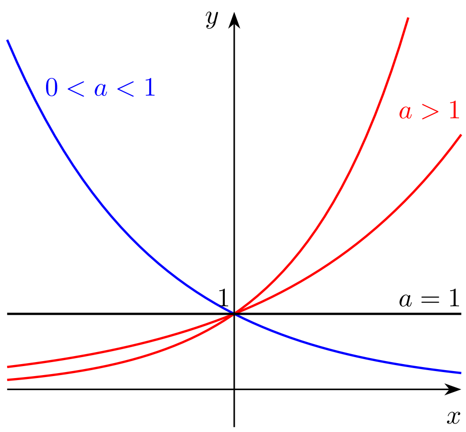
Man kann die Potenzen in nahe liegender Weise sogar auf irrationale Exponenten ausdehnen. Man definiert hierzu grob gesagt a^x so, dass sich das Ergebnis fast nicht von den Potenzen der gleichen Basis mit den umliegenden rationalen Exponenten unterscheidet. Exakt gilt $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$ (s. u.). Die zitierten Potenzgesetze gelten dann immer noch.

Damit kann man für $a > 0$ die **allgemeine Exponentialfunktion** einführen:

$$\begin{array}{rccl} \exp_a : & \mathbb{R} & \to &]0; \infty[\\ & x & \mapsto & \exp_a(x) = a^x \end{array}$$

Die Graphen derartiger Exponentialfunktionen haben je nach Größe der Basis a eine unterschiedliche Gestalt. Für $a > 1$ wachsen die Funktionswerte mit wachsendem x, für $0 < a < 1$ fallen sie. Im Fall $a = 1$ ergibt sich die wenig interessante konstante Funktion mit

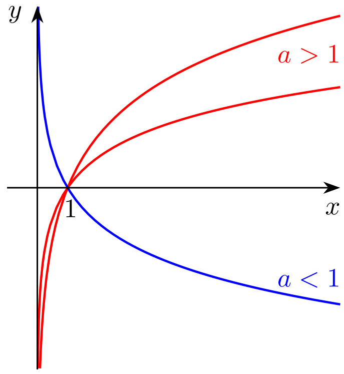
$$\exp_1(x) \;=\; 1^x \;=\; 1.$$



Für $a \neq 1$ kann man unter $y = a^x$ zu einem gegebenen y eindeutig sein Urbild x bestimmen. Dadurch ist eine Funktion $y \mapsto x$ bestimmt. Durch Vertauschung der Bezeichnungen x und y kommt man zur Umkehrfunktion der allgemeinen Exponentialfunktion, die man als **allgemeine Logarithmusfunktion** bezeichnet:

$$\begin{array}{rccl} \log_a : &]0; \infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x = a^y & \mapsto & \log_a(x) = y \end{array}$$

Der Graph der allgemeinen Logarithmusfunktion ergibt sich durch Spiegelung der allgemeinen Potenzfunktion an der ersten Winkelhalbierenden.



Besondere und in der Praxis häufig benötigte Exponential- und Logarithmusfunktionen sind die natürliche Exponentialfunktion e^x und die natürliche Logarithmusfunktion $\ln(x)$ zur Basis e, welche im Arbeitsbuch besprochen werden. Es ist möglich, die allgemeine Exponential- und Logarithmusfunktion folgendermaßen auf die natürlichen Funktionen zurückzuführen:

$$a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$$

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Aus diesem Grund genügt es eigentlich, auf digitalen Hilfsmitteln die natürlichen Funktionen zur Verfügung zu haben.

Beispiel Wie lässt sich die Funktion f mit

$$f(x) = 2^x$$

mithilfe der natürlichen Exponentialfunktion ausdrücken? Wie lautet die Abbildungsvorschrift der Umkehrfunktion f^{-1}? Drücken Sie diese mit der natürlichen Logarithmusfunktion aus.

Wegen $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$ hat die Funktion f den Funktionsterm

$$f(x) = e^{x \cdot \ln(2)}.$$

Die Umkehrfunktion von f ist wegen

$$y = 2^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_2(y)$$

und der Vertauschung von x und y bestimmt durch

$$f^{-1}(x) = \log_2(x).$$

Unter Ausnutzung von $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ ergibt sich als Funktionsterm der Umkehrfunktion

$$f^{-1}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}.$$

◀