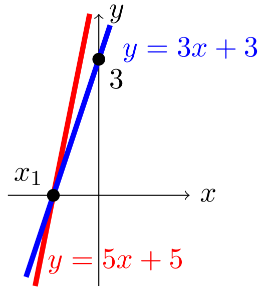
Ausführliche Lösungen

10.1

a)

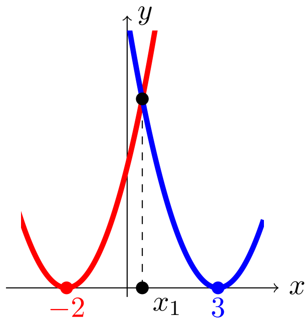
$$\begin{array}{lll} & \mathbf{3x+3} < \mathbf{5x+5} & \mid -3x \\ \Leftrightarrow & 3 < 2x+5 & \mid -5 \\ \Leftrightarrow & -2 < 2x & \mid :2>0 \\ \Leftrightarrow & -1 < x & \end{array}$$



Die gegebene Ungleichung ist erfüllt (genau) für $x > -1$. Grafisch bedeutet sie, dass die rot gezeichnete Gerade (echt) oberhalb der blauen liegt. Die Geraden schneiden sich bei $x_1 = -1$.

b)

$$\begin{array}{lll} & \mathbf{(x+2)^2} \geq \mathbf{(x-3)^2} & \mid \text{binomische Formeln} \\ \Leftrightarrow & x^2+4x+4 \geq x^2-6x+9 & \mid -x^2 \\ \Leftrightarrow & +4x+4 \geq -6x+9 & \mid +6x \\ \Leftrightarrow & 10x+4 \geq 9 & \mid -4 \\ \Leftrightarrow & 10x \geq 5 & \mid :10>0 \\ \Leftrightarrow & x \geq \dfrac{1}{2} & \end{array}$$

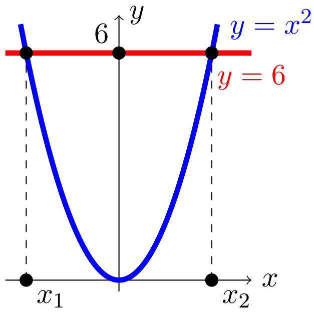


Die gegebene Ungleichung ist erfüllt (genau) für $x \geq \frac{1}{2}$. Grafisch bedeutet sie, dass die rot gezeichnete Parabel (nicht notwendig echt) oberhalb der blauen liegt. Die Parabeln schneiden sich bei $x_1 = \frac{1}{2}$. ◀

10.2

a)

$$\begin{array}{lll} & 3(x+2)^2 \leq 2(x+3)^2 & \mid \text{binomische Formeln} \\ \Leftrightarrow & 3(x^2+4x+4) \leq 2(x^2+6x+9) & \mid \text{Ausmultiplizieren} \\ \Leftrightarrow & 3x^2+12x+12 \leq 2x^2+12x+18 & \mid -12x \\ \Leftrightarrow & 3x^2+12 \leq 2x^2+18 & \mid -2x^2 \\ \Leftrightarrow & x^2+12 \leq 18 & \mid -12 \\ \Leftrightarrow & \mathbf{x^2} \leq \mathbf{6} & \end{array}$$

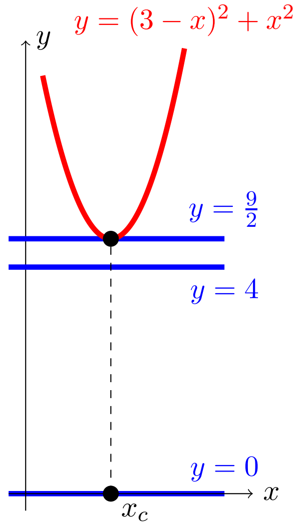


Die erhaltene Ungleichung $x^2 \leq 6$ bedeutet grafisch, dass die blau gezeichnete Parabel unterhalb der rot gezeichneten Geraden $y = 6$ liegt. Durch die nach oben geöffnete Parabel ist dies der Fall zwischen den beiden Stellen $x_1 = -\sqrt{6}$ und $x_2 = \sqrt{6}$, wo sich Parabel und Gerade schneiden. Die Randpunkte x_1 und x_2 des Intervalls sind ebenfalls Lösungen. Die Lösungsmenge ist $[-\sqrt{6}; \sqrt{6}]$.

b) Die Ungleichung $3(x+2)^2 > 2(x+3)^2$ ist genau dort erfüllt, wo es $3(x+2)^2 \leq 2(x+3)^2$ (die vorige) nicht ist. Die Lösungsmenge ist $\mathbb{R} \setminus [-\sqrt{6}; \sqrt{6}] =]-\infty; -\sqrt{6}[\cup]\sqrt{6}; \infty[$. ◀

10.3 Die linke Seite $(3-x)^2 + x^2 = 9 - 6x + x^2 + x^2 = 2x^2 - 6x + 9$ beschreibt eine nach oben geöffnete Parabel. Die zugehörige Funktion nennen wir f. Interpretiert man die rechte Seite als waagerechte Gerade, dann beschreiben die Ungleichungen die Bereiche, in denen die Parabel unterhalb bzw. oberhalb der jeweiligen Geraden verläuft.

a) Zunächst suchen wir die Lösungen der zugehörigen Gleichung $2x^2 - 6x + 9 = 0$. Grafisch entspricht das den Schnittstellen der Parabel mit der x-Achse ($y = 0$).



$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-72}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{-36}}{4}$$

An der negativen Zahl unter der Wurzel erkennt man, dass die Gleichung keine Lösungen besitzt. Die Lösungsmenge L der Ungleichung ist deshalb entweder ganz $\mathbb{R}$ oder die leere Menge $\emptyset$. Wegen $f(0) = 9 > 0$ liegt 0 nicht in L. Folglich ist $L = \emptyset$. Das Bild untermauert, dass die Parabel tatsächlich nirgends unterhalb der x-Achse verläuft.
Hinweis: Aus der vorgelegten Form $(3-x)^2 + x^2$ kann man das Ergebnis mit etwas Überlegung bequemer finden. Als Summe zweier Quadrate kann der Ausdruck nicht negativ werden und Null nur dort, wo beide Quadrate Null werden. Dies ist offenbar nicht möglich.

b) Die quadratische Gleichung lautet jetzt $2x^2 - 6x + 9 = 4$, also $2x^2 - 6x + 5 = 0$. Die Lösungen sind:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-40}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{4}$$

Wieder gibt es keine Lösung der Gleichung, so dass für die Lösungsmenge der Ungleichung nur $L = \mathbb{R}$ oder $L = \emptyset$ infrage kommt. Die nach oben geöffnete Parabel muss für betragsmäßig große x oberhalb der Geraden $y = 4$ verlaufen. Damit ist $L = \mathbb{R}$. Das Bild verdeutlicht das.

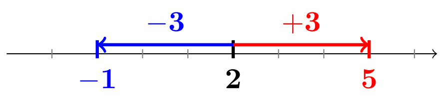
c) Schließlich geht es um die Gleichung $2x^2 - 6x + 9 = \frac{9}{2}$, also $2x^2 - 6x + \frac{9}{2} = 0$. Die Lösungen sind:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Diese eine Stelle $x_c = \frac{3}{2}$ gehört (wegen $\leq$ in der Ungleichung) zur Lösungsmenge L. Da es nur eine Lösung gibt, muss dort das absolute Minimum der Funktion f liegen. Es ist folglich $L = \{\frac{3}{2}\}$. ◀

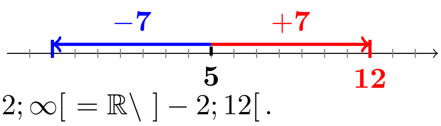
10.4

a) Die Ungleichung $|x-2| < 3$ sucht nach denjenigen x-Werten, deren Abstand von 2 auf der Zahlengeraden kleiner als 3 ist.



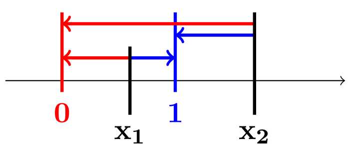
Das sind Stellen mit $x < 2 + 3 = 5$ **und** $x > 2 - 3 = -1$. Genau für $x \in \,]-1; 5[$ ist die Ungleichung also erfüllt.

b) Der Abstand von 5 und x soll mindestens 7 betragen, das heißt $x \geq 5 + 7 = 12$ **oder** $x \leq 5 - 7 = -2$.



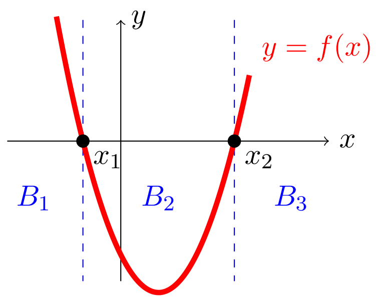
Die Ungleichung ist erfüllt (genau) für $x \in \,]-\infty; -2] \cup [12; \infty[\, = \mathbb{R} \setminus \,]-2; 12[$.

c) Die Forderung $|x| + |x-1| \leq 1$ bedeutet, dass der Abstand zu 0, also $|x| = |x-0|$, und der zu 1, also $|x-1|$, zusammen höchstens 1 sein darf.



Für $x \in [0;1]$ (im Bild etwa x_1) ist diese Summe genau gleich 1. Außerhalb (im Bild etwa x_2) ist bereits mindestens einer der Abstände (im Bild der rote) grösser als 1. Die Ungleichung ist demnach erfüllt (genau) für $x \in\ [0;1]$. ◀

10.5



a) Die Ungleichung $2x + 3 \geq x^2$ ist äquivalent zur Ungleichung $x^2 - 2x - 3 \leq 0$. Die zugehörige Gleichung $x^2 - 2x - 3 = 0$ hat zwei Lösungen.

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2$$

Die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 2x - 3$ kann nur bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$ das Vorzeichen wechseln. In jedem der drei Bereiche $B_1 =]-\infty; -1[$, $B_2 =]-1; 3[$ und $B_3 =]3; \infty[$ ist das Vorzeichen also einheitlich. f ist wegen $f(0) = -3 < 0$ in $B_2 (\ni 0)$ negativ und aufgrund der nach oben geöffneten Parabel in B_1 und B_3 positiv. Durch das $\leq$ ist die Ungleichung in B_2 inklusive Rand erfüllt, insgesamt also für $x \in [-1; 3]$.

Hinweis: Auch in B_1 und B_3 könnte das Vorzeichen über den Funktionswert an einer beliebigen festen Stelle ermittelt werden. Beispielsweise zeigt $f(-2) = 4 + 4 - 3 = 5 > 0$, dass f überall in B_1 positives Vorzeichen hat. Die Kenntnis des Verhaltens von Parabeln "im Unendlichen" erspart uns das aber.

b) Die Ungleichung $\frac{2x+3}{x} \geq x$ ist für $x = 0$ nicht definiert. Die zugehörige Gleichung hat wegen

$$\frac{2x+3}{x} = x \quad \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad 2x + 3 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

die gleichen Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$ wie die Ungleichung aus a). Außer an diesen Stellen kann das Verhalten der Ungleichung aber auch an der Definitionslücke $x_0 = 0$ wechseln. Dadurch entstehen vier Bereiche, in denen jeweils eine Prüfstelle x gewählt wird.

Bereich	$]-\infty; -1[$	$]-1; 0[$	$]0; 3[$	$]3; \infty[$
x	-2	$-\frac{1}{2}$	1	10
$\frac{2x+3}{x}$	$\frac{-4+3}{-2} = \frac{1}{2}$	$-2(-1+3) = -4$	$\frac{2+3}{1} = 5$	$\frac{20+3}{10} = 2{,}3$
$\frac{2x+3}{x} \geq x$?	ja	nein	ja	nein

An den Stellen x_0, x_1 und x_2 selbst ist das Verhalten bereits bekannt. Bei x_1 und x_2 gilt $=$, also erst recht $\geq$. x_0 ist gar nicht erlaubt. Insgesamt ist die gegebene Ungleichung erfüllt für $x \in]-\infty; -1] \cup]0; 3]$.

Hinweis: Ist die Lösung der Ungleichung $2x + 3 \geq x^2$ aus a) bekannt, kann das Ergebnis schneller erhalten werden. Für $x > 0$ ergibt die Multiplikation mit x die vorherige Ungleichung, also die Lösungen $x \in]0; 3]$. Für $x < 0$ dreht sich bei der Multiplikation mit x das Ungleichheitszeichen um (aus $\geq$ wird $\leq$), was die Lösungen $x \in]-\infty; -1]$ produziert.

c) Die Ungleichung $\frac{2x+3}{x+1} \geq \frac{x^2}{x+1}$ ist für $x = -1$ nicht definiert. Für die zugehörige Gleichung bekommt man wegen

$$\frac{2x+3}{x+1} = \frac{x^2}{x+1} \quad \overset{x \neq -1}{\Leftrightarrow} \quad 2x + 3 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

zunächst die gleichen Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$ wie in a) und b). $x_1 = -1$ scheidet jetzt aber aus. Ein Wechsel des Verhaltens kann bei $x_1 = -1$ (Definitionslücke) und $x_2 = 3$ (Lösung der Gleichung) erfolgen. Dadurch entstehen drei Bereiche, in denen jeweils eine Prüfstelle x gewählt wird.

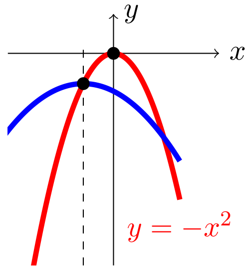
Bereich	$]-\infty;-1[$	$]-1;3[$	$]3;\infty[$
x	-2	0	9
$\frac{2x+3}{x+1}$	$\frac{-4+3}{-1} = 1$	3	$\frac{18+3}{10} = 2{,}1$
$\frac{x^2}{x+1}$	$\frac{4}{-1} = -4$	0	$\frac{81}{10} = 8{,}1$
$\frac{2x+3}{x+1} \geq \frac{x^2}{x+1}$?	ja	ja	nein

Hinzu kommt noch die Lösung $x_2 = 3$ der Gleichung. Insgesamt ist die gegebene Ungleichung erfüllt für $x \in]-\infty;-1[\cup]-1;3] =]-\infty;3] \setminus \{-1\}$.

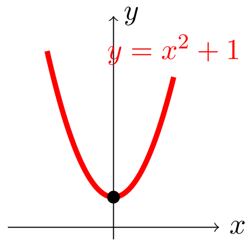
Hinweis: Für $x+1 > 0$ ergibt die Multiplikation mit $x+1$ die Ungleichung aus Teilaufgabe a), also die Lösungen $x \in]-1;3]$. Für $x+1 < 0$ dreht sich bei der Multiplikation mit $x+1$ das Ungleichheitszeichen um, was die Lösungen $x \in]-\infty;-1[$ ergibt. ◀

10.6 Es gibt jeweils sehr viele echte ($a \neq 0$) quadratische Ungleichungen $ax^2+bx+c \leq 0$ mit den vorgegebenen Lösungsmengen L. Mit Gefühl und etwas Glück kann man passende Ungleichungen auch durch Probieren finden. Systematisches Vorgehen und grafisches Vorstellungsvermögen erleichtern das Aufspüren aber erheblich.

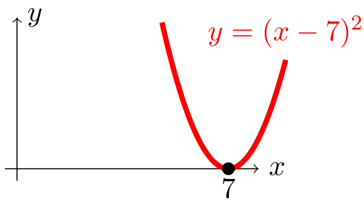
a) $L = \mathbb{R}$ bedeutet grafisch, dass die Parabel $y = ax^2+bx+c$ vollständig unterhalb der x-Achse verläuft. Das ist bei einer nach oben geöffneten Parabel ($a > 0$) unmöglich. $a = 0$ ginge, ist aber nicht zugelassen. Es ist folglich $a < 0$. Eine mögliche Ungleichung ist $\boldsymbol{-x^2 \leq 0}$. Allgemeiner geht jede Ungleichung $ax^2 + c \leq 0$ mit $a < 0$ und $c \leq 0$. Zusätzlich sind noch beliebige Verschiebungen in x-Richtung erlaubt, also $a(x-x_0)^2 + y_0 \leq 0$ mit $a < 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \leq 0$. Ein (willkürliches) zweites Beispiel ist daher $-\frac{1}{4}(x+1)^2 - 1 = \boldsymbol{-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} \leq 0}$.



b) $L = \emptyset$ (leere Menge) bedeutet grafisch, dass die Parabel $y = ax^2 + bx + c$ vollständig oberhalb der x-Achse verläuft, ohne diese zu berühren. Das geht nur mit einer nach oben geöffneten Parabel ($a > 0$). Eine mögliche Ungleichung ist $\boldsymbol{x^2 + 1 \leq 0}$. Allgemeiner geht jede Ungleichung $ax^2 + c \leq 0$ mit $a > 0$ und $c > 0$. Zusätzlich sind wieder beliebige Verschiebungen in x-Richtung gestattet.



c) Die Bedingung $L = \{7\}$ bedeutet grafisch, dass die Parabel $y = ax^2 + bx + c$ nach oben geöffnet ist und die x-Achse bei $x = 7$ berührt. Ihre Gleichung besitzt die Bauart $y = a(x-7)^2$ mit $a > 0$. Eine mögliche Ungleichung ist $(x-7)^2 = \boldsymbol{x^2 - 14x - 49 \leq 0}$.



d) Die Bedingung $L = [0;1]$ bedeutet grafisch, dass die Parabel $y = ax^2 + bx + c$ nach oben geöffnet ist und die x-Achse bei $x = 0$ und $x = 1$ schneidet. Ihre Gleichung besitzt damit die Bauart $y = ax(x-1)$ mit $a > 0$. Eine mögliche Ungleichung ist $x(x-1) = \boldsymbol{x^2 - x \leq 0}$. ◀