Der Satz von Vieta

Auf den französischen Mathematiker François Viète (1540 – 1603), der zu seiner Zeit Franciscus Vieta genannt wurde, geht der Satz zurück, der zur Lösung besonders einfacher quadratischer Gleichungen angewendet werden kann.

Satz von Vieta

Für eine quadratischen Gleichung der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

gilt: x_1 und x_2 sind genau dann die Lösungen der Gleichung, wenn

$$p = -(x_1 + x_2) \text{ und } q = x_1 \cdot x_2.$$

Beispiel 1: Die Gleichung

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

hat die Lösungen

$$x_1 = 1 \text{ und } x_2 = 2.$$

Für ihre Koeffizienten gilt

$$p = -3 = -(1 + 2) \text{ und } q = 2 = 1 \cdot 2$$

◄

Beweis des Satzes

Wenn x_1 und x_2 die Lösungen sind, kann man den quadratischen Term faktorisieren.

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

Durch Ausmultiplizieren der Klammern erhält man

$$x^2 + px + q = x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2$$

und nach dem Zusammenfassen

$$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2.$$

Vergleicht man nun die Koeffizienten der beiden quadratischen Polynome, so erhält man die beiden Terme für p und q

$$p = -(x_1 + x_2) \text{ und } q = x_1 \cdot x_2.$$

Gibt es umgekehrt zwei Zahlen x_1 und x_2, sodass sich die beiden Koeffizienten p und q auf diese Weise berechnen lassen, dann lautet die quadratische Gleichung

$$x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0.$$

Wie oben bereits gezeigt, hat diese Gleichung die faktorisierte Form

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

und wegen des Satzes vom Nullprodukt die beiden Lösungen x_1 und x_2, was zu beweisen war.

◄

Mit den folgenden Beispielen wird gezeigt, wie der Satz von Vieta auf einfache Gleichungen mit ganzzahligen Lösungen angewendet werden kann.

Beispiel 2: Für die Gleichung

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

werden zwei Zahlen x_1 und x_2 gesucht, sodass

$$x_1 \cdot x_2 = 15 \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 = 8.$$

15 kann auf zwei Arten in ganzzahlige Faktoren zerlegt werden, nämlich

$$15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5.$$

Da die Summe der Faktoren 8 sein muss, sind die Lösungen der Gleichung

$$x_1 = 3 \quad \text{und} \quad x_2 = 5.$$

◀

Beispiel 3: Für die Gleichung

$$x^2 + 13x + 12 = 0$$

werden zwei Zahlen x_1 und x_2 gesucht, sodass

$$x_1 \cdot x_2 = 12 \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 = -13.$$

Da die Summe der Faktoren –13 sein muss, müssen beide negativ sein. 12 kann auf drei Arten in negative ganzzahlige Faktoren zerlegt werden:

$$12 = (-1)\cdot(-12) = (-2)\cdot(-6) = (-3)\cdot(-4)$$

Die Zahlen –1 und –12 erfüllen beide Bedingungen, also sind die Lösungen der Gleichung.

$$x_1 = -1 \quad \text{und} \quad x_2 = -12$$

◀

Beispiel 4: Für die Gleichung

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

werden zwei Zahlen x_1 und x_2 gesucht, sodass

$$x_1 \cdot x_2 = 4 \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 = -4.$$

Wie in Beispiel 3 müssen die gesuchten Zahlen negativ sein. 4 kann auf zwei Arten in negative ganzzahlige Faktoren zerlegt werden:

$$4 = (-1)\cdot(-4) = (-2)\cdot(-2)$$

Die zweite Zerlegung erfüllt auch die Bedingung für die Summe. Also hat die Gleichung die doppelte Lösung

$$x_{1,2} = -2.$$

◀

Beispiel 5: Für die Gleichung

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

werden zwei Zahlen x_1 und x_2 gesucht, sodass

$$x_1 \cdot x_2 = -5 \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 = -4.$$

–5 muss in zwei Faktoren mit unterschiedlichen Vorzeichen zerlegt werden, da das Produkt negativ sein soll. Als ganze Zahlen kommen dafür nur infrage

$$-5 = (-1)\cdot 5 \quad \text{oder} \quad -5 = 1\cdot(-5).$$

Für die zweite Zerlegung ergibt sich als Summe der Faktoren –4, also sind die Lösungen der Gleichung

$$x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = -5.$$

◀

Beispiel 6: Für die Gleichung

$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

werden zwei Zahlen x_1 und x_2 gesucht, sodass

$$x_1\cdot x_2 = -21 \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 = 4.$$

Wie in Beispiel 5 müssen x_1 und x_2 unterschiedliche Vorzeichen haben. Mögliche Zerlegungen sind also

$$-21 = (-1)\cdot 21 = 1\cdot(-21) = (-3)\cdot 7 = 3\cdot(-7).$$

Die Summe der beiden Faktoren ist 4 für die beiden Lösungen

$$x_1 = -3 \quad \text{und} \quad x_2 = 7.$$

◀

Beispiel 7: Für die Gleichung

$$x^2 + 4x - 4 = 0$$

werden zwei Zahlen x_1 und x_2 gesucht, sodass

$$x_1\cdot x_2 = -4 \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 = -4.$$

Wie in Beispiel 5 müssen x_1 und x_2 unterschiedliche Vorzeichen haben. Mögliche Zerlegungen sind also

$$-4 = (-1)\cdot 4 = 1\cdot(-4) = (-2)\cdot 2 = 2\cdot(-2).$$

Die Summe der beiden Faktoren ist bei keiner der vier Zerlegungen –4. In diesem Fall hilft der Satz von Vieta nicht weiter, sondern man muss die Lösungsformel anwenden.

◀