Mehr quadratische Gleichungen

Zum Lösen einer quadratischen Gleichung ist eine Lösungsformel hilfreich. Zur Wahl stehen die *abc*- und die *pq*-Formel.

***abc*-Formel.** Die Lösungen der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ sind:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

***pq*-Formel.** Die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ sind:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Zu beachten ist, dass bei Verwendung der *pq*-Formel der Faktor vor x^2 gleich 1 sein muss. Anderenfalls muss die Gleichung vorher durch den Vorfaktor von x^2 dividiert werden, was allerdings zu lästigen Brüchen führen kann. An Hochschulen wird deshalb häufig die universellere *abc*-Formel verwendet.

Beispiel 1 Die folgenden quadratischen Gleichungen besitzen jeweils zwei verschiedene Lösungen x_1 und x_2. Bestimmen Sie diese mit der von Ihnen bevorzugten Lösungsformel.

a) $x^2 + 2x - 2 = 0$	b) $7x^2 + 5x - 2 = 0$	c) $\frac{x^2}{87} + 2x - 87 = 0$
d) $\frac{1}{2}x^2 - 13x + 24 = 0$	e) $-x^2 + x\sqrt{3} + 6 = 0$	f) $x^2 - x(1 - \sqrt{2}) - \sqrt{2} = 0$

Bei der Angabe der beiden Lösungen ist die Schreibweise $x_{1,2} = \left\{ \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right.$ sehr praktisch. Sie ist nicht sehr üblich, aber erfahrungsgemäß intuitiv verständlich. (Sie meint, dass $x_1 = a$ und $x_2 = b$ (oder umgekehrt).)

a) Berechnung mittels *abc*-Formel:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3 \cdot 4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

Auch die *pq*-Formel kann direkt angewandt werden:

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

b) Berechnung mittels *abc*-Formel:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+56}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{14} = \frac{-5 \pm 9}{14} = \begin{cases} -1 \\ \frac{2}{7} \end{cases}$$

Die *pq*-Formel erfordert eine vorbereitende Umformung:

$$7x^2 + 5x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{5}{7}x - \frac{2}{7} = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{5}{14} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{14}\right)^2 + \frac{2}{7}} = -\frac{5}{14} \pm \sqrt{\frac{25}{14^2} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 14}{7 \cdot 2 \cdot 14}} = -\frac{5}{14} \pm \sqrt{\frac{25+56}{14^2}}$$
$$= -\frac{5}{14} \pm \frac{9}{14} = \begin{cases} -1 \\ \frac{2}{7} \end{cases}$$

c) Berechnung mittels abc-Formel:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{\frac{2}{87}} = \frac{87}{2} \cdot \left(-2 \pm 2\sqrt{2}\right) = -87(1 \pm \sqrt{2})$$

Berechnung mittels pq-Formel:

$$\frac{x^2}{87} + 2x - 87 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2 \cdot 87x - 87^2 = 0$$

$$x_{1,2} = -87 \pm \sqrt{87^2 + 87^2} = -87 \pm 87\sqrt{2} = -87(1 \pm \sqrt{2})$$

d) Berechnung mittels abc-Formel:

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 48}}{1} = 13 \pm \sqrt{121} = 13 \pm 11 = \begin{cases} 24 \\ 2 \end{cases}$$

Berechnung mittels pq-Formel:

$$\frac{1}{2}x^2 - 13x + 24 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 26x + 48 = 0$$

$$x_{1,2} = 13 \pm \sqrt{13^2 - 48} = 13 \pm \sqrt{121} = 13 \pm 11 = \begin{cases} 24 \\ 2 \end{cases}$$

e) Berechnung mittels abc-Formel:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{3+24}}{-2} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{27}}{2} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3 \cdot 9}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} \pm 3\sqrt{3}) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{3}(1 \pm 3) = \begin{cases} 2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Berechnung mittels pq-Formel:

$$-x^2 + x\sqrt{3} + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x\sqrt{3} - 6 = 0$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{1}{2}\sqrt{3} \pm \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 6} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \pm \sqrt{\frac{3}{4} + 6} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \pm \sqrt{\frac{3+24}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{3} \pm \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \pm \sqrt{\frac{3 \cdot 9}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \pm \frac{3}{2}\sqrt{3} = \begin{cases} 2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

f) Berechnung mittels abc-Formel:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{(1-\sqrt{2}) \pm \sqrt{(1-\sqrt{2})^2 + 4\sqrt{2}}}{2} = \frac{(1-\sqrt{2}) \pm \sqrt{(1 - 2\sqrt{2} + 2) + 4\sqrt{2}}}{2} \\ &= \frac{(1-\sqrt{2}) \pm \sqrt{1 + 2\sqrt{2} + 2}}{2} = \frac{(1-\sqrt{2}) \pm \sqrt{(1+\sqrt{2})^2}}{2} = \frac{(1-\sqrt{2}) \pm (1+\sqrt{2})}{2} \\ &= \begin{cases} 1 \\ -\sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Berechnung mittels pq-Formel:

$$x^2 - x(1-\sqrt{2}) - \sqrt{2} = 0$$

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{1-\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\frac{1-2\sqrt{2}+2}{4} + \frac{4\sqrt{2}}{4}} \\
&= \frac{1-\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}+2}{4}} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\frac{(1+\sqrt{2})^2}{4}} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \pm \frac{1+\sqrt{2}}{2} \\
&= \begin{cases} 1 \\ -\sqrt{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ergebnis 1 Die beiden Lösungen x_1, x_2 (mit $x_1 < x_2$) sind:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
x_1	$-1-\sqrt{3}$	-1	$-87-87\sqrt{2}$	2	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$
x_2	$-1+\sqrt{3}$	$\frac{2}{7}$	$-87+87\sqrt{2}$	24	$2\sqrt{3}$	1

◀

Tipp zur *pq*-Formel: Bei der pq-Formel entstehen oft unangenehme Brüche oder große Zahlen. Nicht selten können lästige Zahlenrechnungen durch vorgeschaltete Umformungen deutlich vereinfacht oder ganz vermieden werden. Beispielhaft wird dies in b) und c) gezeigt.

Tipp zur *abc*-Formel: In d) ist zu sehen, dass $a = \frac{1}{2}$ sehr geschickt ist, weil dadurch der Nenner $2a$ "entfällt". Es kann sogar Sinn machen, das durch entsprechende Multiplikation der Gleichung herzustellen. Beispielhaft wenden wir diesen **Trick** in a) an:

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x^2 + x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

Dass diese Berechnung genau mit der bei der pq-Formel übereinstimmt, ist keineswegs Zufall. Geht man nämlich allgemein von $x^2 + px + q = 0$ aus, ergibt das Multiplizieren mit $\frac{1}{2}$ die Gleichung $\frac{1}{2}x^2 + \frac{p}{2} + \frac{q}{2} = 0$. Es ist $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{p}{2}$ und $c = \frac{q}{2}$. Anwendung der abc-Formel ergibt (wegen $2a = 1$) $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$, also genau die pq-Formel.

Beispiel 2 Ermitteln Sie für die folgenden Gleichungen in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Anzahl der Lösungen.

a) $x^2 + 2x + a = 0$ b) $x^2 + ax + 2 = 0$ c) $x^2 + ax - 2 = 0$

Ist nur die Anzahl der Lösungen von Interesse, genügt es bei beiden Formeln, den Ausdruck unter der Wurzel, die sogenannte **Diskriminante**, zu untersuchen. Ist diese > 0, gibt es zwei Lösungen. Ist sie $= 0$, verbleibt nur noch eine Lösung (x_1 und x_2 fallen zusammen). Ist sie schließlich < 0, so besitzt die Gleichung gar keine Lösung.

***abc*-Formel.** Die Diskriminante der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ ist:

$$D = b^2 - 4ac$$

***pq*-Formel.** Die Diskriminante der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ ist:

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

	Diskriminante D				
	abc-Formel	pq-Formel	$D=0$	$D<0$	$D>0$
a)	$4-4a$	$1-a$	$a=1$	$a>1$	$a<1$
b)	a^2-8	$\frac{a^2}{4}-2$	$a=\pm\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2}$	$\lvert a\rvert<2\sqrt{2}$	$\lvert a\rvert>2\sqrt{2}$
c)	$a^2+8>0$	$\frac{a^2}{4}+2>0$	–	–	$a\in\mathbb{R}$

Ergebnis 2

	zwei Lösungen	eine Lösung	keine Lösung
a)	$a\in\,]-\infty;1[$	$a\in\{1\}$	$a\in\,]1;\infty[$
b)	$a\in\mathbb{R}\setminus[-2\sqrt{2};2\sqrt{2}]$	$a\in\{-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\}$	$a\in\,]-2\sqrt{2};2\sqrt{2}[$
c)	$a\in\mathbb{R}$	–	–

◀