Ausführliche Lösungen

9.1

a)

$$
\begin{aligned}
& 5x - (8x - 2) = 4 + (4 + 3x) && \mid \text{Termumformungen} \\
\Leftrightarrow\quad & -3x + 2 = 8 + 3x && \mid +3x - 8 \\
\Leftrightarrow\quad & -6 = 6x && \mid :6
\end{aligned}
$$

Die einzige Lösung ist $x = -1$.

b)

$$
\begin{aligned}
& 4(2u - 7) = 3u - 5(2 - u) && \mid \text{Termumformungen} \\
\Leftrightarrow\quad & 8u - 28 = 8u - 10 && \mid -8u + 28 \\
\Leftrightarrow\quad & 0 = 18
\end{aligned}
$$

Es gibt keine Lösung.

c)

$$
\begin{aligned}
& e^{3t-1} = 5 && \mid \ln \\
\Leftrightarrow\quad & 3t - 1 = \ln(5) && \mid +1 \\
\Leftrightarrow\quad & 3t = 1 + \ln(5) && \mid :3 \\
\Leftrightarrow\quad & t = \frac{1}{3} \cdot (1 + \ln(5))
\end{aligned}
$$

Die eindeutige Lösung ist $t = \frac{1}{3}(1 + \ln(5))$.

d)

$$
\begin{aligned}
& \ln(s^2 + 1) = 1 && \mid e \text{ hoch} \\
\Leftrightarrow\quad & s^2 + 1 = e && \mid -1 \\
\Leftrightarrow\quad & s^2 = e - 1 && \mid \sqrt{}
\end{aligned}
$$

Die beiden Lösungen sind $s = \pm\sqrt{e - 1}$.

e)

$$
\begin{aligned}
& (\sqrt{2})^p = 0{,}125 && \mid \ln \\
\Leftrightarrow\quad & p \cdot \ln(\sqrt{2}) = \ln(0{,}125) && \mid :\ln(\sqrt{2}) \neq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & p = \frac{\ln(0{,}125)}{\ln(\sqrt{2})}
\end{aligned}
$$

Wegen $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ und $0{,}125 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$ kann das vereinfacht werden.

$$
p = \frac{\ln(2^{-3})}{\ln(2^{\frac{1}{2}})} = \frac{-3\ln(2)}{\frac{1}{2}\ln(2)} = -6
$$

Die eindeutige Lösung ist $p = -6$. ◀

9.2

a) Der entscheidende Schritt ist das Faktorisieren (F).

$$x^3 = 4x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 4x^2 = 0 \quad \overset{(F)}{\Leftrightarrow} \quad x^2 \cdot (x-4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{0; 4\}$$

Achtung: In der Ausgangsgleichung darf nicht einfach durch x^2 dividiert werden, weil x^2 null werden kann. Man würde sonst fälschlich nur $x = 4$ als Lösung bekommen. Möglich, aber nicht empfehlenswert wäre, $x = 0$ als Lösung zu erkennen (Fall 1) und für $x \neq 0$ (Fall 2) zu dividieren.

b) Um gleiche x-Potenzen zusammenfassen zu können, muss zunächst ausmultipliziert werden (A). Auf der linken Seite ist dabei die binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ hilfreich.

$$(x+2)^2 = x(x-4) \quad \overset{(A)}{\Leftrightarrow} \quad x^2 + 4x + 4 = x^2 - 4x \quad \Leftrightarrow \quad 8x = -4 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$

c) Neben Ausmultiplizieren (A) und Zusammenfassen ist hier elementare Bruchrechnung nötig. Um Brüche zu addieren oder zu subtrahieren, bringt man sie auf den Hauptnenner (HN).

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{3} = x - \frac{1}{2} \cdot (x-7) \quad \overset{(A)}{\Leftrightarrow} \quad \frac{3}{4}x + \frac{1}{3} = x - \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{4}x + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\frac{3}{4} - \frac{1}{2})x = \frac{7}{2} - \frac{1}{3} \quad \overset{(HN)}{\Leftrightarrow} \quad (\frac{3}{4} - \frac{2}{4})x = \frac{21}{6} - \frac{2}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}x = \frac{19}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{4 \cdot 19}{6} = \frac{2 \cdot 19}{3} = \frac{38}{3}$$

d) Kommt x wie hier nur als x^4 und x^2 vor, dann spricht man von einer biquadratischen Gleichung. Die Lösung gelingt dann wegen $x^4 = (x^2)^2 = u^2$ stets mit der Substitution $u = x^2$.

$$\begin{aligned} & x^4 - 13x^2 + 36 = 0 && \mid \text{Substitution } u = x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & u^2 - 13u + 36 = 0 && \mid abc\text{-Formel} \\ \Leftrightarrow \quad & u = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & u = u_1 = 4 \text{ oder } u = u_2 = 9 \end{aligned}$$

Gesucht sind aber die x-Werte. Deshalb muss u wieder rückwärts durch x^2 ersetzt werden. Diese Rücksubstitution ergibt die beiden Gleichungen $x^2 = 4$ und $x^2 = 9$. Die erste Gleichung besitzt die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$, die zweite die Lösungen $x_3 = 3$ und $x_4 = -3$. Genau diese vier x-Werte lösen folglich die Ausgangsgleichung.

e) Hier muss die Substitution etwas abgewandelt werden.

$$\begin{aligned} & x^{10} + 3x^5 - 10 = 0 && \mid \text{Substitution } u = x^5 \\ \Leftrightarrow \quad & u^2 + 3u - 10 = 0 && \mid abc\text{-Formel} \\ \Leftrightarrow \quad & u = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & u = u_1 = 2 \text{ oder } u = u_2 = -5 \end{aligned}$$

Diese Rücksubstitution ergibt die beiden Gleichungen $x^5 = 2$ und $x^5 = -5$. Die erste Gleichung hat die einzige Lösung $x_1 = \sqrt[5]{2}$, die zweite die einzige Lösung $x_2 = -\sqrt[5]{5}$. Die Ausgangsgleichung hat die Lösungsmenge $L = \{-\sqrt[5]{5}; \sqrt[5]{2}\}$.

Achtung: Die Schreibweise $\sqrt[5]{-5}$ ist nicht zulässig, weil sie insbesondere bei der Schreibweise der Wurzel als Potenz große Probleme verursachen würde, indem sie die normalen Rechengesetze außer Kraft setzt. ◀

9.3 Die Lösungen von $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ können als $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ geschrieben werden. Das ist die *abc*-Formel.

a) Für die Gleichung $x^2 + 3x - 4 = 0$ ergibt sich:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

Es gibt zwei Lösungen. Die Lösungsmenge ist $L = \{\frac{-3-5}{2}; \frac{-3+5}{2}\} = \{-4; 1\}$.

b) Für die Gleichung $x^2 + 3x + 4 = 0$ ergibt sich:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

Weil der Ausdruck unter der Wurzel negativ ist, gibt es keine Lösung. Die Lösungsmenge L ist leer, was als $L = \{\}$ oder, an der Hochschule üblicher, als $L = \emptyset$ geschrieben werden kann.

c) Für die Gleichung $x^2 - 4x + 2 = 0$ ergibt sich:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{2 \cdot 4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Es gibt zwei Lösungen. Die Lösungsmenge ist $L = \{2 \pm \sqrt{2}\}$.

d) Für die Gleichung $2x^2 - 4x + 2 = 0$ ergibt sich:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Weil der Ausdruck unter der Wurzel 0 ist, fallen x_1 und x_2 zusammen. Es gibt nur eine Lösung. Die Lösungsmenge ist $L = \{1\}$.

e) Für die Gleichung $-6x^2 - 4x + 2 = 0$ ergibt sich:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{-12} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{-12} = \frac{4 \pm 8}{-12} = \frac{1 \pm 2}{-3}$$

Die Lösungsmenge ist $L = \{-1; \frac{1}{3}\}$.

Hinweis: Etwas kleinere Zahlen bekommt man durch vorheriges Kürzen der Gleichung mit 2 zu $-3x^2 - 2x + 1 = 0$, nämlich:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{-3} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{-6} = \frac{2 \pm 4}{-6} = \frac{1 \pm 2}{-3}$$

◀

9.4 Bei den ersten drei Teilaufgaben ist es sinnvoll, die Gleichung *zuerst* mit $e^x \neq 0$ zu multiplizieren. Beachten Sie, dass die Multiplikation mit Ausdrücken, die 0 werden können, nicht zulässig ist. Es ist daher empfehlenswert, das "$\neq 0$" zu notieren.

a)

$$\begin{aligned}
& e^x - 4e^{-x} = 0 && \mid \cdot e^x \neq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & e^{2x} - 4 = 0 && \mid +4 \\
\Leftrightarrow\quad & e^{2x} = 4 && \mid \ln \\
\Leftrightarrow\quad & 2x = \ln(4) = \ln(2^2) = 2\ln(2) && \mid :2 \\
\Leftrightarrow\quad & x = \ln(2)
\end{aligned}$$

Es gibt also genau eine Lösung. Da es lediglich um die Anzahl der Lösungen geht, wäre das Ergebnis $x = \frac{1}{2}\ln(4)$ gleichwertig.

Hinweis: Wie in den folgenden Teilaufgaben würde auch die Substitution $u = e^x$ funktionieren. Obige Lösung ist aber einfacher.

$$\begin{aligned}
& e^x - 4e^{-x} = 0 && \mid \cdot e^x \neq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & e^{2x} - 4 = 0 && \mid \text{Substitution } u = e^x \\
\Leftrightarrow\quad & u^2 = 4 \\
\Leftrightarrow\quad & u = \pm 2 && \mid \text{Rücksubstitution} \\
\Leftrightarrow\quad & e^x = \pm 2
\end{aligned}$$

Die Gleichung $e^x = -2$ hat keine Lösung. Als Lösung der Ausgangsgleichung bleibt die eindeutige Lösung ($x = \ln(2)$) von $e^x = 2$.

b)

$$\begin{aligned}
& e^x + 4e^{-x} = 4 && \mid \cdot e^x \neq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & e^{2x} + 4 = 4e^x && \mid -4e^x \\
\Leftrightarrow\quad & e^{2x} - 4e^x + 4 = 0 && \mid \text{Substitution } u = e^x \\
\Leftrightarrow\quad & u^2 - 4u + 4 = 0 && \mid abc\text{-Formel} \\
\Leftrightarrow\quad & u = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2 && \mid \text{Rücksubstitution} \\
\Leftrightarrow\quad & e^x = 2
\end{aligned}$$

Die Ausgangsgleichung hat damit eine Lösung ($x = \ln(2)$).

c)

$$\begin{aligned}
& e^x + 2e^{-x} = 3 && \mid \cdot e^x \neq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & e^{2x} + 2 = 3e^x && \mid -3e^x \\
\Leftrightarrow\quad & e^{2x} - 3e^x + 2 = 0 && \mid \text{Substitution } u = e^x \\
\Leftrightarrow\quad & u^2 - 3u + 2 = 0 && \mid abc\text{-Formel} \\
\Leftrightarrow\quad & u = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & u \in \{1; 2\} && \mid \text{Rücksubstitution} \\
\Leftrightarrow\quad & e^x = 1 \quad \text{oder} \quad e^x = 2
\end{aligned}$$

Die Ausgangsgleichung hat zwei Lösungen ($x = 0$ und $x = \ln(2)$).

d)

$$\begin{aligned}
& e^{2x} + e^x = 0 && \mid \text{Substitution } u = e^x \\
\Leftrightarrow\quad & u^2 + u = 0 && \mid \text{Faktorisieren} \\
\Leftrightarrow\quad & u(u+1) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & u \in \{-1; 0\} && \mid \text{Rücksubstitution} \\
\Leftrightarrow\quad & e^x = -1 \quad \text{oder} \quad e^x = 0
\end{aligned}$$

Wegen $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ hat die Ausgangsgleichung keine Lösung.

Hinweis: Das hätte auch direkt erkannt werden können. Die linke Seite der Ausgangsgleichung ist stets echt größer 0.

e)

$$\begin{array}{lll} & e^{2x} - e^x = 2 & \mid \text{Substitution } u = e^x \\ \Leftrightarrow & u^2 - u = 2 & \mid -2 \\ \Leftrightarrow & u^2 - u - 2 = 0 & \mid abc\text{-Formel} \\ \Leftrightarrow & u = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} & \\ \Leftrightarrow & u \in \{-1; 2\} & \mid \text{Rücksubstitution} \\ \Leftrightarrow & e^x = -1 \quad \text{oder} \quad e^x = 2 & \mid e^x = -1 \text{ unmöglich} \\ \Leftrightarrow & e^x = 2 & \end{array}$$

Die Ausgangsgleichung hat eine Lösung ($x = \ln(2)$). ◀

9.5 Nach dem Isolieren der Wurzel und nachfolgendem Quadrieren führen alle Teilaufgaben zur quadratischen Gleichung $x^2 = 30 - x$ mit den beiden Lösungen $x_1 = -6$ und $x_2 = 5$. Die nötige Probe entscheidet, welche davon auch Lösungen der Ausgangsgleichung sind.

a)

$$\begin{array}{lll} & x + \sqrt{30 - x} = 0 & \mid -x \ \text{(Isolieren der Wurzel)} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{30 - x} = -x & \mid \text{Quadrieren} \\ \Rightarrow & 30 - x = x^2 & \mid -30 + x \\ \Leftrightarrow & 0 = x^2 + x - 30 & \mid abc\text{-Formel} \\ \Leftrightarrow & x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+120}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{121}}{2} = \dfrac{-1 \pm 11}{2} & \end{array}$$

Als *mögliche* Lösungen erhält man $x_1 = -6$ und $x_2 = 5$. Für $x_1 = -6$ hat die linke Seite der Ausgangsgleichung den Wert $-6 + \sqrt{36} = 0$, für $x_2 = 5$ den Wert $5 + \sqrt{25} = 10 \neq 0$. Die Ausgangsgleichung hat also nur eine Lösung.

Tipp: Falls wie hier nur ein einziges Mal quadriert wird und ansonsten lauter Äquivalenzumformungen vorliegen, ist es günstig, die Probe mit der Gleichung direkt vor dem Quadrieren (hier $\sqrt{30 - x} = -x$) vorzunehmen. Die Kontrolle ist einfacher und ermöglicht zudem das Entdecken von Rechenfehlern. Beim Einsetzen der möglichen Lösungen dürfen sich die beiden Seiten nämlich höchstens im Vorzeichen unterscheiden. Im vorliegenden Fall wird die Gleichung für $x_1 = -6$ zu $6 = 6$, für $x_2 = 5$ zu $5 = -5$. Hätten Sie beispielsweise fehlerhaft $x_2 = -5$ erhalten, würde die Gleichung zu $\sqrt{35} = -5$.

b) Das Isolieren der Wurzel geschieht am besten so, dass sie ein positives Vorzeichen bekommt.

$$\begin{array}{lll} & x - \sqrt{30 - x} = 0 & \mid +\sqrt{30 - x} \ \text{(Isolieren der Wurzel)} \\ \Leftrightarrow & x = \sqrt{30 - x} & \mid \text{Quadrieren} \\ \Rightarrow & x^2 = 30 - x & \mid \ldots \text{(weiter wie oben)} \end{array}$$

Die Gleichung direkt vor dem Quadrieren ist $x = \sqrt{30 - x}$. Für $x_1 = -6$ wird sie zu $-6 = 6$, für $x_2 = 5$ zu $5 = 5$. Die gegebene Gleichung hat wieder nur eine Lösung, diesmal $x = 5$.

Tipp: Wie im Buch erläutert kann eine Vorzeichenbetrachtung vor dem Quadrieren die Probe einsparen. Im vorliegenden Fall ist die Gleichung $x = \sqrt{30 - x}$ zu betrachten. Die rechte Seite ist immer ≥ 0, die linke genau für $x \geq 0$. Damit wissen wir schon an dieser Stelle, dass von den *möglichen* Lösungen genau diejenigen mit $x \geq 0$ *tatsächlich* Lösungen sind.

c) Da das Vorzeichen beim Quadrieren keine Rolle spielt, ist $(-|x|)^2 = |x|^2 = x^2$.

$$\begin{array}{lll} & |x| + \sqrt{30-x} = 0 & |\ -|x| \text{ (Isolieren der Wurzel)} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{30-x} = -|x| & |\ \text{Quadrieren} \\ \Rightarrow & 30 - x = x^2 & |\ \text{... (weiter wie oben)} \end{array}$$

Die Gleichung vor dem Quadrieren ist $\sqrt{30-x} = -|x|$. Für $x_1 = -6$ wird sie zu $6 = -6$, für $x_2 = 5$ zu $5 = -5$. Die gegebene Gleichung hat keine Lösung. Die Vorzeichenbetrachtung bei $\sqrt{30-x} = -|x|$ würde ≥ 0 auf der linken und ≤ 0 auf der rechten Seite ergeben und zwar unabhängig von x. Beide Seiten müssten Null sein, was offenbar nicht möglich ist. Die Unlösbarkeit wäre damit ohne weitere Rechnung klar.

d)

$$\begin{array}{lll} & |x| - \sqrt{30-x} = 0 & |\ +\sqrt{30-x} \text{ (Isolieren der Wurzel)} \\ \Leftrightarrow & |x| = \sqrt{30-x} & |\ \text{Quadrieren} \\ \Rightarrow & x^2 = 30 - x & |\ \text{... (weiter wie oben)} \end{array}$$

Die Gleichung vor dem Quadrieren ist $|x| = \sqrt{30-x}$. Für $x_1 = -6$ wird sie zu $6 = 6$, für $x_2 = 5$ zu $5 = 5$. Die gegebene Gleichung hat zwei Lösungen.

Tipp: In Glücksfällen, wenn nämlich wie hier beide Seiten einer Gleichung ($|x| = \sqrt{30-x}$) positiv sind, ist Quadrieren eine Äquivalenzumformung. Die Probe ist dann überflüssig. ◀

9.6 Entscheidend ist die Kenntnis, dass $|x-a|$ den Abstand $d \geq 0$ der Zahlen x und a auf dem Zahlenstrahl angibt. Es ist also $x = a + d$ oder $x = a - d$.

a)

$$|x-3| = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3 - 1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 3 - \frac{1}{6} = \frac{3 \cdot 6 - 1}{6} = \frac{17}{6} \quad \text{oder} \quad x = 3 + \frac{1}{6} = \frac{3 \cdot 6 + 1}{6} = \frac{19}{6}$$

Die Lösungsmenge ist $\left\{\frac{17}{6}; \frac{19}{6}\right\}$.

b)

$$|x+2| = \frac{1}{6} - \frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 5 - 1 \cdot 6}{6 \cdot 5} = -\frac{1}{30}$$

Negative Abstände sind nicht möglich. Es gibt daher keine Lösung. Die Lösungsmenge ist $\emptyset$.

Tipp: Die Kenntnis von $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$ ist unerlässlich. Falls man das beachtet, spart man sich die Bruchrechnung.

c) Die Gleichung $|x-3| = |x+2|$ besagt, dass x von 3 den gleichen Abstand hat wie von -2. x liegt demnach genau in der Mitte zwischen den beiden Zahlen, also $x = \frac{3+(-2)}{2} = \frac{1}{2}$. Die Lösungsmenge ist $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. ◀

9.7

a)

$$\begin{aligned}
& e^{2x} - e^x = 2 && \mid \text{Substitution } u = e^x \\
\Leftrightarrow\quad & u^2 - u = 2 && \mid -2 \\
\Leftrightarrow\quad & u^2 - u - 2 = 0 && \mid abc\text{-Formel} \\
\Leftrightarrow\quad & u = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} && \\
\Leftrightarrow\quad & u \in \{-1; 2\} && \mid \text{Rücksubstitution} \\
\Leftrightarrow\quad & e^x = -1 \quad \text{oder} \quad e^x = 2 && \mid e^x = -1 \text{ unmöglich} \\
\Leftrightarrow\quad & e^x = 2 && \mid \ln \\
\Leftrightarrow\quad & x = \ln(2) &&
\end{aligned}$$

Die Ausgangsgleichung hat die Lösung $x = \ln(2)$. Bis auf die leicht veränderte Fragestellung ist die Aufgabe identisch mit Aufgabe 9.4 e) (Lösung auf Seite 5).

b) Weil Wurzeln stets ≥ 0 sind, steht links mindestens 10. Dies zeigt am schnellsten die Unlösbarkeit der Gleichung. Die aufwendige formale Lösung

$$\begin{aligned}
& 2\sqrt{y-3} + 10 = 2 && \mid -10 \\
\Leftrightarrow\quad & 2\sqrt{y-3} = -8 && \mid :2 \\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt{y-3} = -4 && \mid \text{Quadrieren} \\
\Rightarrow\quad & y - 3 = 16 && \mid +3 \\
\Leftrightarrow\quad & y = 19 &&
\end{aligned}$$

erfordert wegen des Quadrierens noch eine Probe. Für $y = 19$ steht in der Ausgangsgleichung links $2 \cdot \sqrt{16} + 10 = 18$. Die einzige mögliche Lösung scheidet folglich aus. Die Gleichung hat keine Lösung.

c)

$$2 \cdot 3^{n+1} = 162 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{n+1} = 81 = 9^2 = 3^4 \quad \Leftrightarrow \quad n = 3$$

Bei der letzten Äquivalenz wird verwendet, dass Exponentialfunktionen a^x mit einer Basis $a \neq 1$ streng monoton und damit umkehrbar sind.

d) Die linke Seite der Gleichung kann faktorisiert werden.

$$a \cdot \ln(a+1) - \ln(a+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-1)\ln(a+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1 \ \vee \ \ln(a+1) = 0$$

$$\ln(a+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a + 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$$

Die Lösungsmenge ist demnach $L = \{0; 1\}$.

e)

$$\begin{aligned}
& 14 + 2e^{-2t} - 16e^{-t} = 0 && \mid \text{Substitution } u = e^{-t} \\
\Leftrightarrow\quad & 14 + 2u^2 - 16u = 0 && \mid \text{Sortieren} \\
\Leftrightarrow\quad & 2u^2 - 16u + 14 = 0 && \mid :2 \\
\Leftrightarrow\quad & u^2 - 8u + 7 = 0 && \mid abc\text{-Formel} \\
\Leftrightarrow\quad & u_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} = 4 \pm 3 &&
\end{aligned}$$

Für beide u-Lösungen muss die Rücksubstitution durchgeführt werden.

$$u_1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-t} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -t = \ln(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0$$

$$u_2 = 7 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-t} = 7 \quad \Leftrightarrow \quad -t = \ln(7) \quad \Leftrightarrow \quad t = -\ln(7)$$

Die vorgegebene Gleichung besitzt (genau) die beiden Lösungen $t_1 = 0$ und $t_2 = -\ln(7)$.

f) Positive Zahlen dürfen aus dem Betrag herausgezogen werden.

$$2 \cdot |3x - 2| = 2 \cdot |3(x - \frac{2}{3})| = 6 \cdot |x - \frac{2}{3}|$$

Damit kann die gegebene Gleichung auf die bekannte Form $|x - a| = b$ gebracht und über die Interpretation des Betrags als Abstand gelöst werden.

$$2 \cdot |3x - 2| = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 6 \cdot |x - \frac{2}{3}| = 5 \quad \Leftrightarrow \quad |x - \frac{2}{3}| = \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{3} - \frac{5}{6} = \frac{4-5}{6} = -\frac{1}{6} \quad \text{oder} \quad x = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{4+5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Die gegebene Gleichung hat zwei Lösungen, $x_1 = -\frac{1}{6}$ und $x_2 = \frac{3}{2}$.

g) Da beide Seiten positiv sind, ist Quadrieren hier eine Äquivalenzumformung, wodurch die Probe entfällt.

$$\begin{array}{lll} & 2\sqrt{3-x} = 3\sqrt{2-x} & |\ \text{Quadrieren positiver Zahlen} \\ \Leftrightarrow & 4 \cdot (3-x) = 9 \cdot (2-x) & |\ \text{Ausmultiplizieren} \\ \Leftrightarrow & 12 - 4x = 18 - 9x & |\ +9x - 12 \\ \Leftrightarrow & 5x = 6 & |\ :5 \\ \Leftrightarrow & x = \frac{6}{5} & \end{array}$$

Die vorgelegte Gleichung hat die eindeutige Lösung $x = \frac{6}{5}$. ◀

9.8 Bezeichnet man den Preis in Cent einer Zucchini am ersten Tag mit p, dann sind die Einnahmen am ersten Tag $120p$. Am zweiten Tag ist der Preis einer Zucchini $p - 10$ und die Einnahmen sind $135(p - 10)$.

$$120p = 135(p-10) \quad \Leftrightarrow \quad 120p = 135p - 1350 \quad \Leftrightarrow \quad 1350 = 15p \quad \Leftrightarrow \quad p = 90$$

Der Preis einer Zucchini am ersten Tag war 90 Cent. ◀

9.9 Ist $p > 0$ der ursprüngliche Preis pro Kilo Kaffee in € und m die dabei für 312 € erhaltene Menge an Kaffee in kg, dann ist $m \cdot p = 312$. Nach der Preiserhöhung ist $(m-2) \cdot (p+1) = 312$. Die erste Gleichung ermöglicht die Ersetzung von m durch p in der zweiten:

$$\begin{array}{lll} & (m-2)(p+1) = 312 & |\ \text{Einsetzen: } m = \frac{312}{p} \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{312}{p} - 2\right)(p+1) = 312 & |\ \cdot \frac{p}{2} \neq 0 \\ \Leftrightarrow & (156 - p)(p+1) = 156p & |\ \text{Ausmultiplizieren} \\ \Leftrightarrow & 156p + 156 - p^2 - p = 156p & |\ -156p \\ \Leftrightarrow & 156 - p^2 - p = 0 & |\ \text{Sortieren} \\ \Leftrightarrow & p^2 + p - 156 = 0 & |\ abc\text{-Formel} \\ \Leftrightarrow & p = \frac{1}{2} \cdot (-1 \pm \sqrt{1 + 624}) = \frac{1}{2} \cdot (-1 \pm 25) & \end{array}$$

Als Preis kommt offenbar nur die positive der beiden Lösungen infrage, also $p = \frac{1}{2} \cdot (-1 + 25) = 12$. Der ursprüngliche Preis eines Kilos Kaffee betrug 12 €. ◀