Formales Lösen von Betragsgleichungen

Beispiel 1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $|3-8x| = 5$.

Die Aufgabe soll mit verschiedenen Methoden gelöst werden.

Methode 1: Die im Buch vorgestellten Methode, den **Betrag als Abstand** auf der Zahlengeraden zu interpretieren, funktioniert problemlos. Lediglich eine kleine vorbereitende Umformung ist nötig.

$$|3-8x| \;=\; |8x-3| \;=\; |8(x-\frac{3}{8})| \;=\; 8|x-\frac{3}{8}|$$

Damit geht es weiter wie es im Buche steht:

$$|3-8x| \;=\; 5 \quad\Leftrightarrow\quad 8|x-\frac{3}{8}| \;=\; 5 \quad\Leftrightarrow\quad |x-\frac{3}{8}| \;=\; \frac{5}{8}$$

Der Abstand von x zu $\frac{3}{8}$ soll also $\frac{5}{8}$ betragen. Diese Bedingung erfüllen die beiden Zahlen

$$x_1 = \frac{3}{8}+\frac{5}{8} = \frac{8}{8} = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{3}{8}-\frac{5}{8} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}.$$

Methode 2: Formal gelöst werden kann die Gleichung $|3-8x| = 5$ mittels **Fallunterscheidung**. Basis hiervon ist:

$$|a| \;=\; \begin{cases} +a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases} \;=\; \begin{cases} +a & \text{für } a > 0 \\ -a & \text{für } a \leq 0 \end{cases} \;=\; \begin{cases} +a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a \leq 0 \end{cases}$$

Für $a = 0$ ist $+a = -a$. Daher ist es gleichgültig, welche dieser drei Arten verwendet wird. Insbesondere ist es legitim, $a = 0$ doppelt aufzuführen.

Zu unterscheiden sind in der vorliegenden Aufgabe zwei Fälle, bei der ersten Art $3-8x \geq 0$ und $3-8x < 0$.

1. Fall: $3-8x \geq 0$:

$$|3-8x| = 5 \quad\Leftrightarrow\quad 3-8x = 5 \quad\overset{+8x-5}{\Leftrightarrow}\quad -2 = 8x \quad\overset{:8}{\Leftrightarrow}\quad -\frac{1}{4} = x$$

2. Fall: $3-8x < 0$:

$$|3-8x| = 5 \quad\Leftrightarrow\quad 8x-3 = 5 \quad\overset{+3}{\Leftrightarrow}\quad 8x = 8 \quad\overset{:8}{\Leftrightarrow}\quad x = 1$$

Methode 2*: Im vorliegenden, besonders einfachen Fall kann die Fallunterscheidung durch die Schreibweise "$\pm$" deutlich einfacher gefasst werden:

$$|3-8x| = 5 \quad\Leftrightarrow\quad 3-8x = \pm 5 \quad\overset{-3}{\Leftrightarrow}\quad -8x = -3 \pm 5 \quad\overset{:(-8)}{\Leftrightarrow}\quad x = \frac{3}{8} \mp \frac{5}{8}$$

Methode 3: Wegen $|a| = \sqrt{a^2}$ kann die Gleichung auch wie eine Wurzelgleichung durch **Quadrieren** gelöst werden:

$$|3-8x| = 5 \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{\sqrt{(3-8x)^2}}_{\geq 0} = \underbrace{5}_{\geq 0} \quad\overset{\text{Quadrieren}}{\Leftrightarrow}\quad (3-8x)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow\quad 9-48x+64x^2 = 25 \quad\Leftrightarrow\quad 64x^2-48x-16 = 0 \quad\overset{:16}{\Leftrightarrow}\quad 4x^2-3x-1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{8} = \frac{3 \pm 5}{8}$$

Ergebnis 1 Die Lösungsmenge ist $\{-\frac{1}{4}; 1\}$. ◀

Beispiel 2 Lösen Sie die Gleichung $|2x-1| = x+1$.

Trotz der passenden linken Seite kommt man hier über die Interpretation als Abstand auf der Zahlengeraden nicht vernünftig zum Ziel. Wir betrachten die Fallunterscheidung und die Schreibweise des Betrages als Wurzel.

Methode 1: Bei der Fallunterscheidung ist das Vorzeichen des Ausdrucks $2x-1$ relevant (→ Abschnitt 2.2).

1. Fall: $2x - 1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq \frac{1}{2}$:

$$|2x-1| = x+1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x-1 = x+1 \quad \overset{-x+1}{\Leftrightarrow} \quad x = 2$$

Die Voraussetzung $x \geq \frac{1}{2}$ dieses Falles ist erfüllt. $x_1 = 2$ ist eine Lösung.

2. Fall: $2x - 1 < 0 \;\Leftrightarrow\; x < \frac{1}{2}$:

$$|2x-1| = x+1 \quad \Leftrightarrow \quad 1-2x = x+1 \quad \overset{+2x-1}{\Leftrightarrow} \quad 0 = 3x \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

Die Voraussetzung $x < \frac{1}{2}$ dieses Falles ist erfüllt. $x_2 = 0$ ist eine Lösung.

Methode 2: Die Gleichung $|2x-1| = x+1$ ist nur erfüllt, wenn rechts etwas Positives (≥ 0) steht, also für $x \geq -1$. Dann ist Quadrieren eine Äquivalenzumformung.

$$|2x-1| = x+1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(2x-1)^2} = x+1 \quad \overset{\text{Quadrieren}}{\Leftrightarrow} \quad (2x-1)^2 = (x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x^2 - 4x + 1 = x^2 + 2x + 1 \quad \overset{-x^2-2x-1}{\Leftrightarrow} \quad 3x^2 - 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{0; 2\}$$

Ergebnis 2 Die Gleichung besitzt die beiden Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 0$. ◀

Beispiel 3 Lösen Sie die Gleichung $|x(x-3)| = 3x - 5$.

Der Betrag hat hier keine geeignete Form zur Interpretation als Abstand auf der Zahlengeraden. Auch Quadrieren ist durch die entstehenden vierten Potenzen wenig einladend. Damit bleibt nur die Fallunterscheidung.

$y = x(x-3)$ stellt eine nach oben geöffnete Parabel dar, welche die x-Achse bei 0 und 3 schneidet. Es muss unterschieden werden, ob x zwischen diesen beiden Stellen oder außerhalb liegt.

1. Fall: $x \in [0; 3]$:

$$|x(x-3)| = 3x-5 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-3) = -(3x-5) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x = -3x + 5$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{5}$$

Nur $x_1 = +\sqrt{5}$ liegt in $[0; 3]$.

2. Fall: $x \in \mathbb{R} \setminus [0;3]$

$$|x(x-3)| = 3x-5 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-3) = 3x-5 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x = 3x - 5$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = 3 \pm 2$$

Nur $x_2 = 5$ liegt in $\mathbb{R} \setminus [0;3]$.

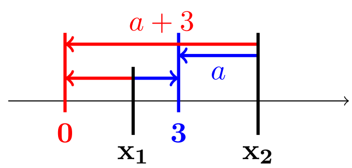
Ergebnis 3 Die Gleichung besitzt die beiden Lösungen $x_1 = \sqrt{5}$ und $x_2 = 5$. ◀

Beispiel 4 Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $|3-x| = 5 - |x|$?

Als Methode kommen die grafische Interpretation und die formale Fallunterscheidung infrage. Das Ersetzen der Beträge durch Wurzeln wäre hier viel zu aufwendig, weil es zweimaliges Quadrieren erfordert.

Methode 1: $|3-x| = 5 - |x| \quad \Leftrightarrow \quad |x-3| + |x| = 5$. Die Abstände $|3-x| = |x-3|$ von x zu 3 und $|x| = |x-0|$ von x und 0 sollen zusammen 5 ergeben.

Für $x \in [0;3]$ (im Bild etwa x_1) ist diese Summe genau gleich 3, die Gleichung also nicht erfüllt. Bezeichnen wir für $x > 3$ (im Bild etwa x_2) den Abstand zu 3 mit a, dann ist der Abstand zu 0 gleich $a+3$. Zusammen $(a + (a+3) = 2a+3)$ soll das 5 ergeben.



Das bedeutet $a = 1$ und damit $x = 4$. Entsprechend muss für $x < 0$ der Abstand zu 3 um drei größer sein als der zu 0, was nur für $x = -1$ gegeben ist.

Methode 2: Bei der Lösung mit Fallunterscheidung sind drei Fälle, z. B. $x < 0$ (x links von 0), $0 \le x \le 3$ (x zwischen 0 und 3), $x > 3$ (x rechts von 3) zu betrachten ($\rightarrow$ Abschnitt 2.2).

1. Fall: Bei $x < 0$ ergibt sich:

$$|3-x| = 5 - |x| \quad \Leftrightarrow \quad 3 - x = 5 + x \quad \Leftrightarrow \quad -2 = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$$

2. Fall: Bei $0 \le x \le 3$ ergibt sich:

$$|3-x| = 5 - |x| \quad \Leftrightarrow \quad 3 - x = 5 - x \quad \Leftrightarrow \quad -2 = 0\,, \quad \text{also keine Lösung}$$

3. Fall: Bei $x > 3$ ergibt sich:

$$|3-x| = 5 - |x| \quad \Leftrightarrow \quad x - 3 = 5 - x \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$$

Ergebnis 4 Die Gleichung ist erfüllt für $x = -1$ und für $x = 4$. ◀