Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben

8.1 Berechnen Sie.

a) $8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = (2)^2 = 4$. Wahlweise kann auch folgendermaßen aufgelöst werden:
$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$. Hierbei muss man dann aber wissen, dass $4^3 = 64$ ist.

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 : \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{2^2}{5^2}\right) \cdot \left(\frac{2^2}{5^2}\right) = \frac{4\cdot 4}{25\cdot 25} = \frac{16}{625}$.

c) $4^3 \cdot \sqrt[3]{64} : 8^{-\frac{1}{3}} = 64 \cdot 4 : \frac{1}{8^{\frac{1}{3}}} = 64 \cdot 4 : \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = 64 \cdot 4 \cdot \sqrt[3]{8} = 64 \cdot 4 \cdot 2 = 512$.

d) $\frac{\sqrt[3]{56}}{\sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[3]{7\cdot 8}}{\sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{8}$. ◀

8.2 Vereinfachen Sie so weit wie möglich.

a) $a^{-2} : a^{-4} = a^{-2} : \frac{1}{a^4} = a^{-2} \cdot a^4 = \frac{1}{a^2} \cdot a^4 = \frac{a^4}{a^2} = a^2$

b) $\left(\frac{x^2\cdot y}{n\cdot m^3}\right)^3 : \left(\frac{x\cdot y^2}{n^2\cdot m^2}\right)^4 = \left(\frac{x^2\cdot y}{n\cdot m^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{n^2\cdot m^2}{x\cdot y^2}\right)^4 = \frac{x^6\cdot y^3}{n^3\cdot m^9} \cdot \frac{n^8\cdot m^8}{x^4\cdot y^8} = \frac{x^2\cdot n^5}{y^5\cdot m}$

c) $\left(\frac{\sqrt[3]{4x^2}}{\sqrt[2]{x^3}}\right)^{-2} = \left(\frac{\sqrt[2]{x^3}}{\sqrt[3]{4x^2}}\right)^2 = \left(\frac{x^3}{(4x^2)^{\frac{2}{3}}}\right) = \left(\frac{x^{\frac{9}{3}}}{(16x^4)^{\frac{1}{3}}}\right) = \sqrt[3]{\frac{x^5}{16}}$ für alle $x \geq 0$

d) $\frac{\sqrt{v}\cdot\sqrt[4]{v^3}}{\sqrt[3]{v}} = \frac{v^{\frac{1}{2}}\cdot v^{\frac{3}{4}}}{v^{\frac{1}{3}}} = \frac{v^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}}{v^{\frac{1}{3}}} = \frac{v^{\frac{5}{4}}}{v^{\frac{1}{3}}} = v^{\frac{5}{4}-\frac{1}{3}} = v^{\frac{11}{12}}$ für alle $v \geq 0$ ◀

8.3 Beseitigen Sie die Wurzeln in Nenner

a) $\frac{5}{\sqrt{7}} = \frac{5\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}} = \frac{5\cdot\sqrt{7}}{7}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{5+\sqrt{5\cdot 3}}{5-3} = \frac{5+\sqrt{15}}{2}$

c) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt{4}}{4^{\frac{1}{3}}} = \frac{4^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{3}}} = 4^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

d) $\frac{\sqrt{n}-\sqrt{m}}{\sqrt{n}+\sqrt{m}} = \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{m})\cdot(\sqrt{n}-\sqrt{m})}{(\sqrt{n}+\sqrt{m})\cdot(\sqrt{n}-\sqrt{m})} = \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{m})^2}{(\sqrt{n})^2-(\sqrt{m})^2} = \frac{(\sqrt{n})^2-2\sqrt{n}\cdot\sqrt{m}+(\sqrt{m})^2}{n-m} = \frac{n-2\sqrt{mn}+m}{n-m}$ ◀