Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben

6.1 Ordnen Sie die Zahlen der Größe nach:

a) Um die Brüche zu vergleichen, muss man diese jeweils so erweitern, dass sie den selben (Haupt-)Nenner haben. Der Hauptnenner ist hier $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$. Die Auf den Hauptnenner erweiterten Brüche sehen folgendermaßen aus: $\frac{7}{20} = \frac{147}{420}$; $\frac{5}{14} = \frac{150}{420}$; $\frac{1}{3} = \frac{140}{420}$; $\frac{13}{35} = \frac{156}{420}$. Für das Ergebnis ordnet man die Brüche in absteigender Reihenfolge der Zähler: $\frac{13}{35} > \frac{5}{14} > \frac{7}{20} > \frac{1}{3}$; ◀

b) Damit die Größe der jeweiligen Zahlen bestimmen zu können, bietet es sich an, alle Zahlen als Brüche zu schreiben, sowie vorhandene Brüche soweit wie möglich zu kürzen. Anschließend erweitert man die Brüche auf den gemeinsamen Hauptnenner, um diese dann zu vergleichen.
Es ist: $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$; $336{,}4 \cdot 10^{-3} = \frac{336{,}4}{1000} = \frac{3364}{10\,000}$; $0{,}000194 \cdot 2000 = 0{,}388 = \frac{388}{1000}$
Der Hauptnenner ist hier 10 000 und damit ergibt sich:
$\frac{2}{5} = \frac{4000}{10\,000}$; $\frac{3364}{10\,000}$; $\frac{39}{100} = \frac{3900}{10\,000}$; $\frac{388}{1000} = \frac{3880}{10\,000}$;
Dier Lösung ist somit: $\frac{6}{15} > \frac{39}{100} > 0{,}000194 \cdot 2000 > 336{,}4 \cdot 10^{-3}$ ◀

6.2 Vereinfachen Sie so weit wie möglich.

c) Die Subtraktion zweier Brüche setzt einen gemeinsamen Hauptnenner voraus. Dieses ist hier gegeben. Damit ergibt sich: $-\frac{7}{20} - \frac{1}{20} = \frac{-7-1}{20} = -\frac{8}{20}$. Da der Bruch im Zähler und Nenner jeweils noch den Faktor 4 aufweist, kann man den Bruch noch kürzen: $-\frac{8}{20} = -\frac{2}{5}$.

d) Für die Vereinfach bietet es sich an, den Zähler und Nenner zunächst getrennt zu betrachten und dort so weit wie möglich jeweils zu vereinfachen.
Zähler: $\frac{4}{9} \cdot 3 = \frac{4}{3}$ (Kürzen mit 3); Nenner: $10 \cdot \frac{91}{7} = 10 \cdot 13 = 130$
Damit ergibt sich: $\frac{\frac{4}{9} \cdot 3}{10 \cdot \frac{91}{7}} = \frac{\frac{4}{3}}{130} = \frac{4}{3 \cdot 130} = \frac{4}{3 \cdot 130} = \frac{2}{3 \cdot 65} = \frac{2}{195}$

e) Zuerst wird im Nenner mit Hilfe des Distributivgesetzes die 7 ausgeklammert, anschließend löst man den Doppelbruch auf. Damit kann man anschließend mit $a + b$ kürzen.
$\frac{7a+7b}{\frac{a+b}{a-b}} = \frac{7(a+b)}{\frac{a+b}{a-b}} = \frac{7(a+b) \cdot (a-b)}{a+b} = 7(a-b) = 7a - 7b$
Hinweis: Das Zusammenfassen des Produkts $(a + b) \cdot (a - b)$ im Zähler mittels dritter binomischer Formel ist nicht zielführend.

f) Bei diesem Bruch kann lediglich im Zähler der Faktor a ausgeklammert werden. Da im Nenner der Faktor nicht in beiden Summanden enthalten ist, kann hier nichts zusammengefasst werden. $\frac{a^3+ab+ac}{ax-by} = \frac{a(a^2+b+c)}{ax-by}$

g) Sowohl im Zähler als auch im Nenner ist in den einzelnen Termen immer der Faktor c enthalten. Durch Anwendung des Distributivgesetzes kann dieser ausgeklammert werden. $\frac{a^2c+2abc+cb^2}{ac+bc} = \frac{c(a^2+2ab+b^2)}{c(a+b)} = \frac{a^2+2ab+b^2}{a+b}$
Der Zähler kann nun mit Hilfe der ersten binomischen Formel noch zu $(a + b)^2$ vereinfacht

werden. Damit kann man den Bruch mit dem Term $(a+b)$ kürzen.

$\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2}{a+b} = a+b$

h) Wie in Teilaufgabe b) betrachten wir zunächst Zähler und Nenner getrennt und vereinfachen diese so weit wie möglich. Man bringt dabei die jeweilige Differenz bzw. Summe auf einen Bruch mittels Erweiterung mit dem Hauptnenner.

Zähler: $\frac{a^2y}{b} - \frac{bx^2}{y} = \frac{a^2y^2-b^2x^2}{by}$; Nenner: $\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{ay+bx}{by}$

Damit ergibt sich: $\frac{\frac{a^2y}{b}-\frac{bx^2}{y}}{\frac{a}{b}+\frac{x}{y}} = \frac{\frac{a^2y^2-b^2x^2}{by}}{\frac{ay+bx}{by}} = \frac{a^2y^2+b^2x^2}{by} \cdot \frac{by}{ay+bx} = \frac{a^2y^2+b^2x^2}{ay+bx}$

Der Zähler kann mittels der dritten binomischen Formel noch weiter vereinfacht werden, da anschließend dann gekürzt werden kann:

$\frac{a^2y^2+b^2x^2}{ay+bx} = \frac{(ay+bx)(ay-bx)}{ay+bx} = ay - bx$ ◀

6.3 Bringen Sie auf einen Hauptnenner.

a) Zur Bestimmung des Hauptnenners siehe das entsprechende Online-Material. In diesem Fall besteht der Hauptnenner aus den Faktoren 2, 3, a und b, insgesamt also 6ab. Damit ergibt sich:

$\frac{10}{3a} - \frac{7}{2b} + \frac{5}{6} = \frac{20b}{6ab} - \frac{21a}{6ab} + \frac{5ab}{6ab} = \frac{20b-21a+5ab}{6ab}$

b) Beide Nenner sind teilerfremd, d. h. sie haben keine gemeinsame Faktoren. Damit ist der Hauptnenner das Produkt aus den beiden Nennern.

$\frac{9}{x-3} - 2x\square 3y\square = \frac{9\cdot 3y}{(x-3)3y} - 2x(x-3)\square(x-3)3y\square = \frac{27y-(-2x^2+6x)}{3y(x-3)} = \frac{2x^2-6x+27y}{3y(x-3)}$ ◀