

Bestimmung des Hauptnenners

Bei der Addition und Subtraktion von Brüchen ist die Voraussetzung immer, dass die Nenner der jeweiligen Brüche gleich sind. Die vermeintlich einfache Möglichkeit, alle vorhandenen Nenner miteinander zu Multiplizieren und die jeweiligen Brüche um die fehlenden Faktoren zu erweitern, erweist sich in den meisten Fällen als umständlich und komplex, insbesondere, wenn mehr als 2 Brüche auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden müssen. Dazu folgendes Beispiel:

Berechnen Sie:

$$\frac{3x}{2(x-1)} + \frac{1}{x+1} - \frac{2-x}{x^2-1}$$

Die Multiplikation aller Nenner würde den gemeinsamen Nenner $2(x-1)(x+1)(x^2-1)$ ergeben. Auf diese relativ schnelle Ermittlung eines gemeinsamen Nenners, folgt eine relativ aufwendige Erweiterung der jeweiligen Brüche im Zähler. Man erhält bei der Berechnung zwar auch das korrekte Ergebnis der Berechnung (nach Kürzen und Zusammenfassen), letztendlich muss man aber mehr Rechenschritte ausführen. Statt einfach alle Nenner miteinander zu multiplizieren, ist es in dem Beispiel, aber auch im Allgemeinen, einfacher den Hauptnenner zu bestimmen. Mathematisch ist der Hauptnenner das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Nenner. Es werden gemeinsame Faktoren nicht mehrfach verwendet. Dazu sollten alle Nenner so weit wie möglich faktorisiert werden:

Bruch 1:	$2 \cdot (x - 1)$	
Bruch 2:	$(x + 1)$	
Bruch 3:	$x^2 - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1)$	(3. bin. Formel)
kgV:		
	$2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$	$= 2 \cdot (x^2 - 1)$

Da die Terme $(x - 1)$ sowohl in Nenner von Bruch 1 als auch Bruch 3, sowie $(x + 1)$ im Nenner von Bruch 2 und Bruch 3 vorkommen, werden diese nur einfach verwendet. Der Hauptnenner ist also $2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$ und die Zähler der jeweiligen Brüche müssen nicht mehr umfangreich erweitert werden.

$$\begin{aligned} & \frac{3x}{2(x-1)} + \frac{1}{x+1} - \frac{2-x}{x^2-1} && | \text{Hauptnenner} \\ = & \frac{3x(x+1)}{2(x^2-1)} + \frac{2(x-1)}{2(x^2-1)} - \frac{(2-x) \cdot 2}{2(x^2-1)} \\ = & \frac{3x^2+3x+2x-2-(4-2x)}{2(x^2-1)} && | \text{Zusammenfassen} \\ = & \frac{3x^2+7x-6}{2(x^2-1)} \end{aligned}$$

Generell ist das obige Vorgehen, die Faktoren der Nenner jeweils untereinander zu schreiben, sinnvoll, um relativ schnell den Hauptnenner bestimmen zu können.