Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben

5.1 Zwischen welchen aufeinander folgenden ganzen Zahlen liegt die jeweilige Zahl? Berechnen Sie das Ergebnis überschlägig.

a) Die Zahl $\sqrt{190}$ muss zwischen den beiden Zahlen liegen, die im Quadrat gerade drunter bzw. drüber liegen: $(x_1)^2 < (\sqrt{190})^2 < (x_2)^2$
Die Quadratzahl vor 190 ist 169 = 13^2, die danach ist 196 = 14^2. Demnach gilt:
$13^2 < (\sqrt{190})^2 < 14^2$ und damit $13 < \sqrt{190} < 14$

b) Größtenteils analog zu Teilaufgabe a) kann man hier vorgehen. Zur Vereinfachung vernachlässigt man zunächst das Vorzeichen und erhält:
$$22^2 < (\sqrt{500})^2 < 23^2 \text{ und damit } 22 < \sqrt{500} < 23$$
Durch Multiplikation mit (-1) dieser Ungleichung erhält man das Ergebnis:
$$-22 > \sqrt{500} > -23$$
(ACHTUNG: Durch die Multiplikation verändern sich auch die Ungleichheitszeichen!)

c) Um zu bestimmen, zwischen welchen ganzen Zahlen $-\frac{117}{5}$ liegt, vernachlässigt man auch hier zunächst das Vorzeichen. Analog zu Beispiel 5.1 berechnet man das Vielfache des Nenners, welches gerade noch kleiner als der Zähler ist, um die kleinere ganze Zahl zu erhalten (hier: $23 \cdot 5 = 115$). Das nächste Vielfache ist bereits größer als 117 ($24 \cdot 5 = 120$), es gilt also $23 > \frac{117}{5} > 24$.
Wiederrum multipliziert man das Ergebnis mit (-1) und erhält:
$$-23 > -\frac{117}{5} > -24$$

d) Zunächst betrachtet man auch hier nur den Bruch für sich ohne die Potenz. Analog zu c) erhält man $2 > \frac{42}{17} > 3$

e) Hilfreich ist hier die Vorüberlegung, dass die dritte Potenz einer negativen Zahl wieder negativ ist. Somit kann für weitere Überlegungen zunächst das Minus in der Klammer vernachlässigt werden. Nach den Potenzgesetzen (vgl. Kapitel 8) kann man $\left(\sqrt{5}\right)^3$auch als $\left(\sqrt{5^3}\right) = \left(\sqrt{125}\right)$. Analog zu a) erhält man $11 < \sqrt{125} < 12$.
Durch hinzunahem des Minuszeichens erhält man $-12 < \left(-\sqrt{5}\right)^3 < -11$. ◀

5.2 Schreiben Sie die Zahlen in wissenschaftlicher Schreibweise

a) Möchte man die Zahl in der Darstellung zwischen 1 und 10 mit der entsprechenden Zehnerpotenz schreiben, muss das Komma um 7 Stellen nach links verschoben werden. Damit ergibt sich $9{,}8538430 \cdot 10^7$. Möchte man eine Darstellung der Zahl im Bereich von 0 bis 1 muss das Komma um eine weitere Stelle nach links verschoben werden.

b) Für die Darstellung zwischen 1 und 10 muss das Komma um weitere 5 Stellen nach links verschoben werden, d.h. die Zehnerpotenz hat im Exponenten eine 5 stehen. Da bereits eine Zehnerpotenz mit -7 im Exponenten vorhanden ist, erhält man insgesamt eine Zehnerpotenz mit dem Exponenten -2.

c) Die Division durch eine Zehnerpotenz kann auch als Multiplikation mit dem Kehrwert geschrieben werden: $479 \cdot 10^{-4}$. Damit erhält man analog zu b) die Darstellung $4{,}79 \cdot 10^{-2}$.

d) Durch umschreiben der jeweiligen Zahlen in wissenschaftliche Schriebweis e ergibt $1 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^4\ 10^{-4}$. Die beiden Zehnerpotenzen heben sich gegenseitig auf und somit erhält man als Lösung 2. ◀

5.3 Schreiben Sie ohne Klammern und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

a) In dieser Aufgabe kann man lediglich die Klammern eliminieren, indem man das Minuszeichen jeweils in die Klammer multipliziert. Eine weitere Vereinfachung ist hier nicht möglich.

b) Durch die zweifache Anwendung des Distributivgesetzes erhält man:
$$\begin{aligned}(u-v)\cdot(x+y) &= (u-v)\cdot x + (u-v)\cdot y\\ &= u\cdot x - (v\cdot x) + u\cdot y - (v\cdot y)\\ &= ux + uy - vx - vy\end{aligned}$$

c) Innerhalb der Klammer ist ein Produkt. Das Quadrat kann deshalb einfach auf beide Terme angewendet werden: $(6\cdot x)^2 = 6^2\cdot x^2 = 36x^2$

d) Bei Differenzen innerhalb der Klammer muss man die zweite binomische Formel anwenden. $(2e-3f)^2 = (2e)^2 - 2\cdot 2e\cdot 3f + (3f)^2 = 4e^2 12ef + 9f^2$

e) Durch Anwendung der zweiten binomischen Formel erhält man:
$(g^2-h)^2 = (g^2)^2 - 2\cdot g^2\cdot h + (h)^2 = g^4 - 2g^2h + h^2$

f) Auf den ersten Faktor wird die erste, auf den zweiten die zweite binomische Formel angewandt: $(x+y)^2 - (x-y)^2 = (x^2+2xy+y^2) - (x^2-2xy+y^2)$
Beim Zusammenfassen muss noch auf das Minus vor der Klammer geachtet werden.
$(x^2+2xy+y^2) - (x^2-2xy+y^2) = x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2 = 4xy$

g) Zunächst teilt man die Multiplikation in zwei Faktoren auf:
$(m+2n)^3 = (m+2n)^2\cdot(m+2n)$
Der erste Faktor kann nun mit Hilfe der ersten bin. Formel aufgelöst werden:
$(m+2n)^2\cdot(m+2n) = (m^2+4mn+4n^2)\cdot(m+2n)$
Wendet man nun das Distributivgesetz an, kann man den Term ohne Klammern schreiben:
$$\begin{aligned}(m^2+4mn+4n^2)\cdot(m+2n) &= m^3+2m^2n+4m^2n+8mn^2+4mn^2+8n^3\\ &= m^3+6m^2n+12mn^2+8n^3\end{aligned}$$

h) Hier muss zunächst das Binom aufgelöst werden, bevor man zusammenfassen kann. Nach Anwendung der zweiten bin. Formel muss noch auf das Minuszeichen vor der Klammer geachtet werden.
$-12s-(s-3)^2 = -12s-(s^2-6s+9) = -s^2-6s-9$

i) Innerhalb der Klammer sind drei Terme, deshalb kann hier keine der binomischen Formeln angewandt werden. Um den Gesamtterm aufzulösen muss man das Quadrat als Multiplikation ausschrieben und das Distributivgesetz anwenden.
$$\begin{aligned}(2a+3-5b)^2 &= (2a+3-5b)\cdot(2a+3-5b)\\ &= 4a^2+6a-10ab+6a+9-15b-10ab-15b+25b^2\\ &= 4a^2+12a-20ab-30b+25b^2+9\end{aligned}$$ ◀

5.4

a) Die Aufgabe lässt sich mit einem klassischen Dreisatz lösen. Es reicht hierfür auf den zehnten Teil des Grundpreises zu gehen. Wenn 100g 1,95€ kosten, dann kosten 10g $\frac{1,95}{10}$ €. Damit muss man für die 110g Wurst $\frac{1,95}{10}\cdot 11$ € $= 2,145$ € zahlen. Da es allerdings keine Zehntel-Cent gibt, wird hier zugunsten des Kunden auf 2,14 € abgerundet.

b) Bei dieser Aufgabe kann auch mittels des Dreisatzes das Ergebnis berechnet werden. Allerdings kann hier auf die Normierung, d.h. die Berechnung eines Einheitswertes verzichtet werden. Stattdessen kann man von 100m auf 272m mit dem Faktor 2,72 direkt kommen. Demnach benötigt der Aufzug für die Höhe 272m eine Zeit von $23s\cdot 2,72 = 62,56s$ also knapp 63 Sekunden.

c) Zunächst muss berechnet werden, wieviel ¾ von 350l entsprechen:
$350l \cdot 0{,}75 = 262{,}5l$. Da der Zufluss konstant ist, nimmt der Inhalt proportional zur Zeit zu. Damit kann die Gesamtzeit berechnet werden mit $\frac{262{,}5l}{0{,}03\frac{l}{min}} = 8750min$.

d) Da mehr Personen im Reinigungstrupp eine Verkürzung der Arbeitszeit bedingt, liegt hier eine Antiproportionalität vor. Es muss also gegensinnig im Dreisatz gerechnet werden: Wenn 4 Personen 5 Stunden und 20 Minuten ($5\frac{1}{3}h = 320min$) benötigen, benötigt eine Person die vierfache Zeit ($= 1280\text{min}$). Die 7 Personen benötigen dann ein Siebtel der Zeit von einer Person: $1280\text{min} \cdot \frac{1}{7} \approx 182{,}86min \approx 3h\ 3min$

e) Zunächst muss berechnet werden, wie viel Tonnen des Bauschutts mit einem Zug mit 18 Waggons transportiert werden kann. Da in einen Waggon immer gleich viel hinein passt, liegt eine Proportionalität vor und kann mit Hilfe des Dreisatzes berechnet werden:

30 Waggons <-> 230t

1 Waggon <-> $\frac{230t}{30} = \frac{23}{3}t$

18 Waggons <-> $\frac{23}{3}t \cdot 18 = 138t$

Ein Zug kann also 138t Bauschutt abtransportieren. Damit benötigt man für die 622t insgesamt $\frac{622t}{138\frac{t}{Zug}} \approx 4{,}51$ Züge. Die fünf Züge reichen also aus, der letzte Zug muss nur zur Hälfte befüllt werden. ◀