Ausführliche Lösungen

4.1

a) $[1; 5] \subset \{1; 2; 3; 4; 5\}$
Die Aussage ist falsch, da das Intervall nicht nur natürliche Zahlen enthält.

b) $\{1; 5\} \subset [1; 5]$
Die Aussage ist richtig, da das Intervall die Zahlen 1 und 5 enthält.

c) $\{1; 5\} \subset \mathbb{N}$
Die Aussage ist richtig, da 1 und 5 natürlichen Zahlen sind.

d) $\{1{,}5\} \subset \mathbb{N}$
Die Aussage ist falsch, da 1,5 keine natürliche Zahlen ist.

e) $[1; 5] \subset \mathbb{N}$
Die Aussage ist falsch, da das Intervall nicht nur natürliche Zahlen enthält.

f) $\{1; 5\} \subset \mathbb{R}$
Die Aussage ist richtig, da 1 und 5 reelle Zahlen sind.

g) $\{1{,}5\} \subset \mathbb{R}$
Die Aussage ist richtig, da 1,5 eine reelle Zahl ist.

◀

4.2

$A = \{0; 3; 6; 9; \dots\}$, $B = \{0; 5; 10;15; \dots\}$

a) $A \cap B = \{0; 15; 30; 45; \dots\}$

b) $A \setminus B = \{3; 6; 9; 12; 18; 21; 24; 27; 33; \dots\}$

c) $\overline{A} = \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11; \dots\}$

◀

4.3

Der Doppelpfeil ist falsch, da aus der rechten Seite nicht die linke folgt. Richtig wäre der Implikationspfeil $\Rightarrow$. Die Schreibweise $f(2) \to 4$ ist falsch. Richtig wäre $f(2) = 4$.

◀

4.4

a) $\int_a^b \left(f_1(x) + f_2(x)\right) dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx$

Das bestimmte Integral der Summe zweier Funktionen über dem Intervall $[a; b]$ kann man als Summe der Integrale der beiden Funktionen über $[a; b]$ berechnen.

◀

b) $f_1(x) < f_2(x)$ für alle $x \in [a; b] \;\Rightarrow\; \int_a^b f_1(x)\,dx < \int_a^b f_2(x)\,dx$.

Wenn die Funktionswerte einer Funktion f_1 im Intervall $[a; b]$ stets kleiner sind als die einer zweiten Funktion f_2, dann ist auch das Integral von f_1 über $[a; b]$ kleiner als das von f_2.

◀

4.5

$y + 10 = 8x \;\wedge\; x + 10 = 0{,}5y$

Gesucht ist ein Zahlenpaar (x; y) mit den beiden Eigenschaften: Wenn man 10 zu y addiert, erhält man den 8-fachen Wert von x, und wenn man 10 zu x addiert, erhält man den halben Wert von y.

◀

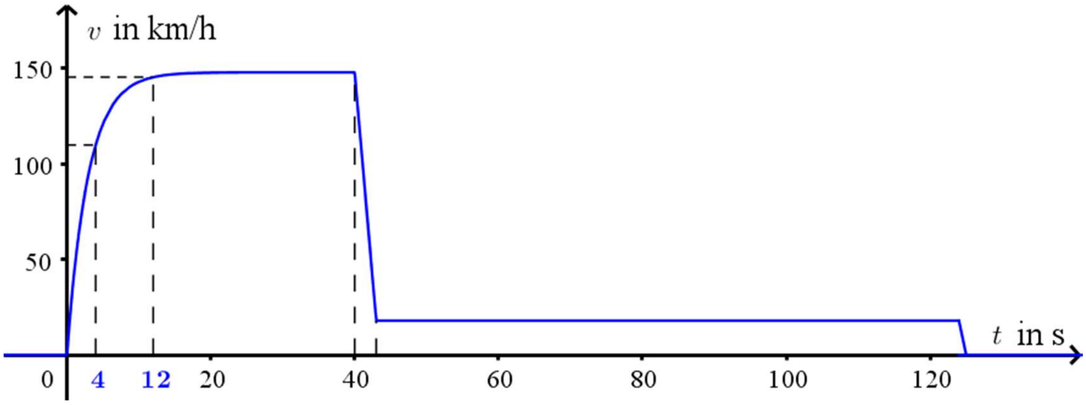
4.6

a) Die Aussage ist falsch. Zum Beispiel ist 9 durch 3, aber nicht durch 6 teilbar.
b) Die Aussage ist richtig. Wenn das Produkt gerade wäre, wäre es durch 2 teilbar. Dann müsste mindestens einer der beiden Faktoren durch 2 teilbar sein, was ein Widerspruch zur Voraussetzung wäre.
c) Die Aussage ist richtig. Die Summe von drei aufeinander folgenden Zahlen ist immer das Dreifache der mittleren Zahl.
d) Die Aussage ist richtig. Eine Zahl, die keine Primzahl ist, hat mindestens zwei echte Teiler. Da sie ungerade ist, müssen die Teiler ungerade sein (siehe b)).

◀

4.7

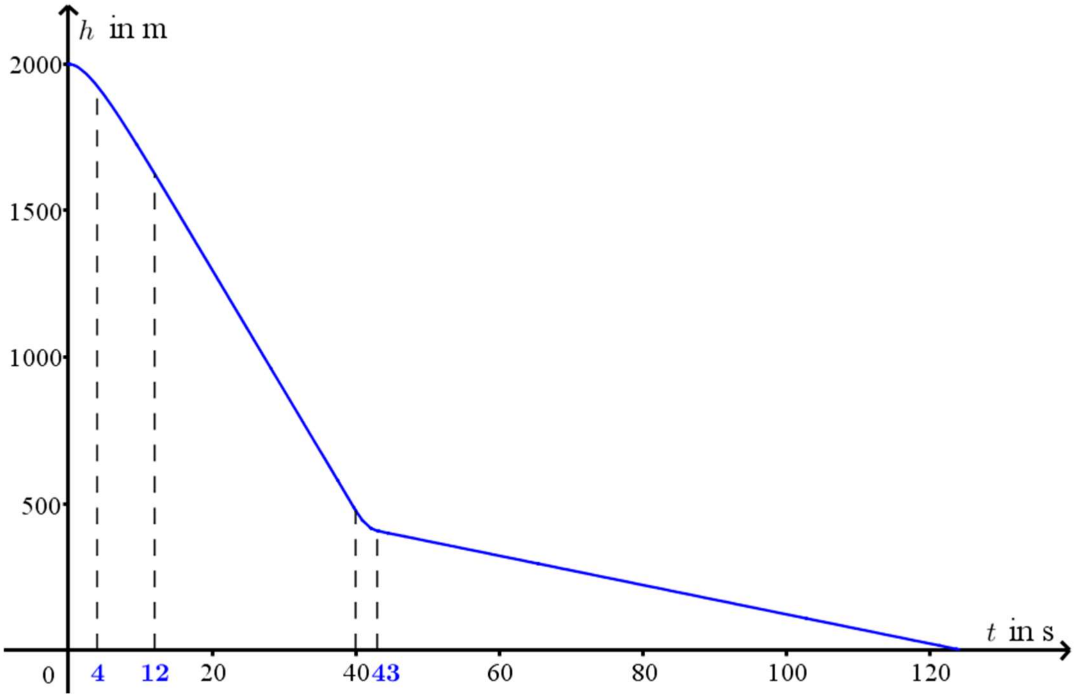
Zusammenhang zwischen Zeit und Geschwindigkeit



1. Phase: Nach dem Absprung nimmt die Geschwindigkeit 4 s lang von 0 auf 110 km/h zu. Dies wird im Graphen durch eine steil ansteigende Linie durch den Ursprung und den Punkt (4|110) dargestellt.
2. Phase: Zwischen der 4. und der 12. Sekunde nimmt die Geschwindigkeit bis auf nahezu 148 km/h zu, die Zunahme verringert sich aber wegen des zunehmenden Luftwiderstandes. Daher nimmt die Steigung des Graphen im Intervall]4; 12[laufend ab. Der Graph ist in diesem Intervall rechtsgekrümmt.
3. Phase: Bis zur 40. Sekunde bleibt die Geschwindigkeit konstant 148 km/h, was im Graphen durch eine horizontale Linie im Intervall]12; 40[dargestellt wird.
4. Phase: Innerhalb der nächsten 3 s reduziert sich die Geschwindigkeit wegen des nun geöffneten Fallschirms auf 18 km/h; im Graph wird dies durch die steil abfallende Strecke zwischen den Punkten (40| 148) und (43| 18) dargestellt.

5. Phase: Im weiteren Verlauf bleibt die Geschwindigkeit 18 km/h, was wieder durch den horizontalen Verlauf des Graphen dargestellt wird. Da der Fallschirmspringer mit dieser Geschwindigkeit fliegt, bis er auf dem Erdboden landet, fällt der Graph zum Zeitpunkt der Landung schnell bis zur *t*-Achse ab. Diesen Zeitpunkt kann man dem folgenden Diagramm entnehmen.

Zusammenhang zwischen Zeit und Höhe



1. und 2. Phase: Nach dem Absprung aus 2000 m Höhe nimmt die Höhe immer mehr ab. Da die Geschwindigkeit in diesem Zeitraum zunimmt, ist der Graph im Intervall [0; 12[zunächst stärker, später weniger stark rechtsgekrümmt.
3. Phase: Danach nimmt die Höhe bis zur 40. Sekunde mit konstanter Geschwindigkeit ab. Also fällt der Graphen im Intervall [12; 40[linear bis zum Punkt (43|500).
4. Phase: Innerhalb der nächsten 3 s öffnet sich der Fallschirm, und die Geschwindigkeit reduziert sich auf 18 km/h. Auch in dieser Phase nimmt die Höhe ab, da der Fallschirmspringer mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von

$$\frac{148\,\text{km/h} + 18\,\text{km/h}}{2} = 83\,\text{km/h}$$

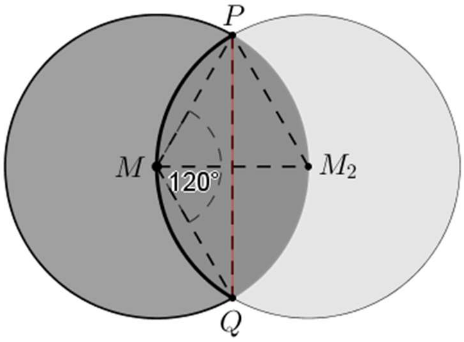
weiter fällt, und zwar um etwa

$$83\,\text{km/h} \cdot 3\,\text{s} = \frac{83000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} \cdot 3\,\text{s} \approx 70\,\text{m}.$$

Der Graph ist im Intervall]40; 43[linksgekrümmt und hat den Endpunkt (43|430).
5. Phase: Auf den restlichen 430 m bis zum Erdboden verliert der Fallschirmspringer gleichmäßig an Höhe, und zwar 18/3,6 m = 5 m in der Sekunde. Der Graph ist bis zum Erreichen der *t*-Achse linear. Aus dem Diagramm kann man ablesen, dass dies nach etwa 125 s Gesamtflugzeit der Fall ist. ◄

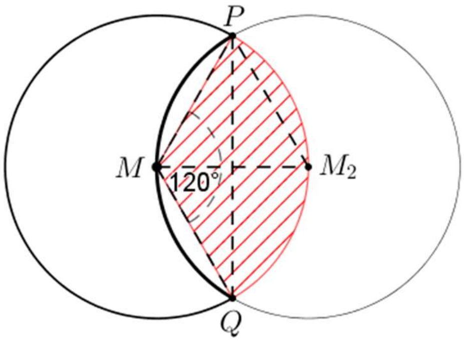
4.8

Aus der Zeichnung kann man entnehmen, dass die abgebildete Figur durch zwei Kreisbögen mit folgenden Eigenschaften begrenzt ist: Der linke Bogen gehört zu einem Kreis mit Mittelpunkt M und Radius 10 cm, der rechte Bogen enthält M und überspannt ein gleichschenkliges Sehnendreieck mit dem Winkel 120° an der Spitze.



In der Zeichnung ist M_2 der Mittelpunkt des rechten Kreises. Die Strecken PM_2 und MM_2 sind Radien dieses Kreises, und daher ist das Dreieck PMM_2 gleichschenklig mit dem Basiswinkel 60°, also gleichseitig.

Daraus folgt, dass auch der rechte Kreis den Radius 10 cm hat und die aus dem linken Kreis ausgeschnittene Fläche doppelt so groß ist wie das 120°-Kreissegment.



Der Kreissektor macht ein Drittel des Kreises aus, also ist seine Fläche

$$A_s = \frac{1}{3}\pi\, r^2.$$

Das Dreieck PMQ hat die Grundseite $r\sqrt{3}$ und die Höhe $\frac{r}{2}$ und somit den Flächeninhalt

$$A_d = \frac{r}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{r}{2} = \frac{1}{4}r^2\sqrt{3}.$$

Für die Fläche des Kreissegments gilt:

$$A = A_s - A_d = \frac{1}{3}\pi\, r^2 - \frac{1}{4}r^2\sqrt{3}.$$

Die gesuchte Fläche A_F der Figur ist

$$A_F = \text{Kreisfläche} - 2\cdot\text{Fläche des Kreissegments}$$
$$= \pi r^2 - 2\left(\frac{1}{3}\pi r^2 - \frac{1}{4}r^2\sqrt{3}\right) \approx 191{,}32\ \text{cm}^2.$$

Ein Vergleich der Flächen zeigt, dass die Figur ein bisschen größer ist als der halbe Kreis. Dies wird durch den berechneten Wert bestätigt.

◄