Ausführliche Lösungen

3.1

a) Fehler in der 4. Zeile: Es ist $\sqrt{x^2-9} \neq x-3$ und $\sqrt{x^2+9} \neq x+3$.
Für die richtige Lösung muss gelten $x^4 \geq 81$, also $x \geq 3 \ \vee \ x \leq -3$.
Mit folgenden Äquivalenzumformungen wird die richtige Lösung berechnet:

$$\begin{aligned} &\sqrt{x^4-81} = 16 && \mid \text{quadrieren, da beide Seiten nicht negativ sind} \\ \Leftrightarrow\ & x^4 - 81 = 256 && \mid +81 \\ \Leftrightarrow\ & x^4 = 337 && \mid \text{4. Wurzel ziehen} \\ \Leftrightarrow\ & x = \pm\sqrt[4]{337} && \end{aligned}$$

◀

b) Fehler in der 2. Zeile: Die Anwendung des Satzes vom Nullprodukt ist nur möglich, wenn das Produkt 0 ist, nicht 4 wie in der Aufgabe.

Weiterer Fehler in der 4. Zeile: Die zweite Gleichung in der 3. Zeile hat keine Lösung, da $-4e^{-2x}$ für alle x negativ ist. Bei richtiger Umformung würde man erhalten

$$-2x = \ln\left(-\tfrac{3}{4}\right),$$

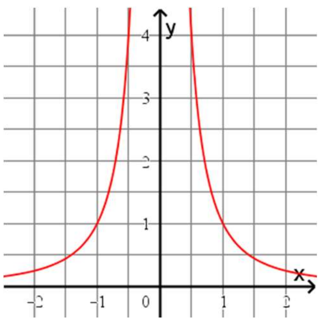
was nicht definiert ist.
Mit folgenden Äquivalenzumformungen berechnet man die richtige Lösung:

$$\begin{aligned} & e^x(1-4e^{-2x}) = 4 && \mid \text{ausmultiplizieren der Klammer} \\ \Leftrightarrow\ & e^x - 4e^{-x} = 4 && \mid \cdot e^x \\ \Leftrightarrow\ & e^{2x} - 4 = 4e^x && \mid -4e^x \\ \Leftrightarrow\ & e^{2x} - 4e^x - 4 = 0 && \mid \text{Substitution } e^x = z \\ \Leftrightarrow\ & z^2 - 4z - 4 = 0 && \mid \text{Lösen der quadratischen Gleichung in } z \\ \Leftrightarrow\ & z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+4} && \\ \Leftrightarrow\ & z_1 = 2 + \sqrt{8} \ \vee \ z_2 = 2 - \sqrt{8} && \mid \text{Rücksubstitution} \\ \Leftrightarrow\ & e^x = 2 + \sqrt{8} && \mid \text{da } z_2 < 0 \text{, hat } z_2 = e^x \text{ keine Lösung} \\ \Leftrightarrow\ & x = \ln(2+\sqrt{8}) && \end{aligned}$$

◀

3.2

Die Skizze des Graphen der Funktion $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ macht den Fehler deutlich:



Da die Funktion überall positiv ist, müsste auch das Integral positiv sein. Alternativ könnte man argumentieren, dass die Funktion für $x = 0$ nicht definiert ist. Sie ist im Intervall $[-1; 1]$ nicht integrierbar.

◀

3.3

a) Ein Quader mit den angegebenen Maßen hat das Volumen

$$V = 6{,}50\text{ m} \times 3\text{ m} \times 2{,}50\text{ m} = 48{,}75\text{ m}^3.$$

Wegen der Abrundungen des Tanks wird das Volumen auf ca. 40 m^3 geschätzt.

◀

b) Die Abschätzung wird in folgenden Schritten vorgenommen:
Zunächst berechnet man

$$5^5 = 3125.$$

Damit kann man die Anzahl der Stellen von 5^{10} schätzen, denn:

$$5^{10} = (5^5)^2 = (3125)^2 \approx 1\,000\,000 = 10^7$$

Im nächsten Schritt verwendet man diese Abschätzung für $5^{(5^5)}$:

$$5^{(5^5)} = 5^{3125} \approx 5^{10\cdot 312} = (5^{10})^{312} \approx (10^7)^{312} \approx 10^{2184}$$

Die Zahl hat etwa 2184 Stellen.

◀

c) Handelsübliche Tüten mit 500 g Kaffeebohnen sind 10 cm breit, 7 cm tief und 20 cm hoch, d.h., ihr Volumen beträgt etwa

$$V_{\text{Tüte}} = 10\text{ cm} \times 7\text{ cm} \times 20\text{ cm} = 1400\text{ cm}^3.$$

Schätzungsweise 30 % des Volumens in einer Kaffeetüte bestehen aus Luft. Das Volumen der Kaffeebohnen beträgt also

$$V_{\text{Kaffee}} = 0{,}7\cdot 1400\text{ cm}^3 = 980\text{ cm}^3.$$

Das Volumen einer durchschnittlichen Kaffeebohne wird auf etwa 0,4 cm^3 geschätzt. Damit erhält man für die Zahl der Kaffeebohnen den Schätzwert

$$Z = \frac{980\text{ cm}^3}{0{,}4\text{ cm}^3} \approx 2500.$$

Alternativ kann man die Masse schätzen: Wenn man Kaffeebohnen zählt, wiegen 50 Kaffeebohnen etwa 10 g. Für die Zahl der Bohnen in einem Pfund Kaffee gilt also $Z = \frac{500\text{ g}}{10\text{ g}}\cdot 50 = 2500$.

◀

3.4

$$0{,}002^{-2} = \left(\frac{2}{1000}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{500}\right)^{-2} = 500^2 = 250000$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^4 = 0{,}2^4 = (2\cdot 10^{-1})^4 = 2^4\cdot 10^{-4} = 16\cdot 10^{-4} = 0{,}0016$$

$$100000^{0{,}2} = \sqrt[5]{100000} = \sqrt[5]{10^5} = 10$$

$$0{,}5^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$$

$$(-0{,}25)^{-2} = \left(-\tfrac{1}{4}\right)^{-2} = (-4)^2 = 16$$

$$0{,}5^{-0{,}25} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2} \approx \sqrt{1{,}4} \approx 1{,}2, \text{ weil } 1{,}2^2 = 1{,}44$$

$$2{,}5^5 = \left(\frac{5}{2}\right)^5 = \frac{3125}{32} = \frac{3200-75}{32} = 100 - \frac{75}{32} \approx 100 - 2 = 98$$

$$2{,}5^{-5} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-5} = \left(\frac{2}{5}\right)^5 = \frac{32}{3125} \approx 0{,}01$$

$$(-2{,}5)^5 \approx -98$$

Die Reihenfolge der Terme nach der Größe geordnet ist

$(-2{,}5)^5 < \left(\frac{1}{5}\right)^4 < 2{,}5^{-5} < 0{,}5^{-0{,}25} < 0{,}5^{-3} < 100000^{0{,}2} < (-0{,}25)^{-2} < 2{,}5^5 < 0{,}002^{-2}$.

◀

3.5

a) Nach 5600 Jahren ist noch die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Menge an ^{14}C vorhanden. Da

$$\frac{10000}{5600} \approx 1{,}8$$

sind nach 10000 Jahren noch etwa $\left(\frac{1}{2}\right)^{1{,}8}$ vorhanden. Es gilt folgende Abschätzung

$$0{,}25 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^{1{,}8} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1{,}5} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2}\cdot 0{,}7 = 0{,}35.$$

Nach 10000 Jahren enthält die Substanz noch etwa 30 % der ursprünglich vorhandenen Menge an ^{14}C.

◀

b) Da $0{,}8 \approx (0{,}5)^{1/3}$, kann man die gesuchte Zahl an Jahren mit Hilfe der Halbwertszeit schätzen:

$$T \approx 5600 \cdot \frac{1}{3} \approx 1870$$

Vor etwa 1870 Jahren ist die Substanz abgestorben.

◀