Ausführliche Lösungen

1.1

a)

- Was für eine Grundfläche hat die Pyramide?
- Welche Eigenschaften haben die Dreiecke, aus denen die Grundfläche zusammengesetzt werden kann?
- Welche Eigenschaften hat ein Dreieck, das aus der Höhe der Pyramide und einer der Steilkanten gebildet wird?
- ...

◀

b)

- Welche Lage hat eine beliebige Ursprungsparabel in Bezug auf den Graphen von f?
- Wie viele Punkte hat die Normalparabel mit dem Graphen von f gemeinsam? Wie viele sind es bei einer anderen Ursprungsparabel?
- Wo müsste ein Berührpunkt der beiden Kurven liegen?
- Welche Bedingungen gelten für Kurven, die sich berühren?
- ...

◀

c)

- Kann man die Entwicklung des BIP/Kopf durch eine mathematische Funktion beschreiben?
- Gibt es eine ähnliche Funktion, mit der man die Entwicklung der Arbeitslosenquote beschreiben kann?
- Gibt es einen mathematisch begründeten Zusammenhang zwischen der Arbeitslosenquote und dem BIP/Kopf?
- …

◀

1.2

a) Volumen einer Kugel mit Durchmesser d:

$$V(d) = \frac{1}{6}\pi\, d^3$$

Volumen der Hohlkugel (d in cm, V in cm^3):

$$V = V(d) - V(d-6) = \frac{1}{6}\pi\,(d^3 - (d-6)^3)$$

$$\text{Volumen} = \frac{\text{Masse}}{\text{Dichte}} = \frac{39600\text{ g}}{7{,}85\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} \approx 5014\text{ cm}^3$$

$$V = V(d) - V(d-6) = 5014$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{6}\pi\,(d^3 - (d-6)^3) = 5014$$

$$\Leftrightarrow \quad d^3 - (d^3 - 18d^2 + 108d - 216) = \frac{6}{\pi} \cdot 5014$$

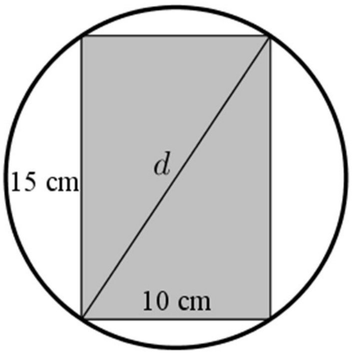
$$\Leftrightarrow \quad 18d^2 - 108d + 216 \approx 9576$$

$$\Leftrightarrow \quad d \approx 26 \ \ (\vee \ \ d \approx -20)$$

Der äußere Durchmesser ist etwa 26 cm, der innere etwa 20 cm.

◀

b) Skizze des Sachverhalts



Der Querschnitt des Balkens ist ein Rechteck mit den Maßen 10 cm × 15 cm. Die Diagonale d des Rechtecks muss kleiner sein als der Innendurchmesser des Rohres.

$$d = \sqrt{(10\text{ cm})^2 + (15\text{ cm})^2} \approx 18{,}03\text{ cm}$$

$d > 18$, also ist der Balken zu groß.

◀

c) Mit der abgeschiedenen Kupfermenge M in g, der Stromstärke I in A, der Dauer t in h und der Proportionalitätskonstanten c in $\frac{\text{g}}{\text{Ah}}$ gilt:

$$M = c \cdot I \cdot t$$

Damit

$$0{,}12\text{ g} = c \cdot 0{,}4\text{ A } 0{,}25\text{ h} = 0{,}1\text{ Ah} \cdot c$$

$$\Leftrightarrow \quad c = 1{,}2\,\frac{\text{g}}{\text{Ah}}.$$

Daraus ergibt sich:

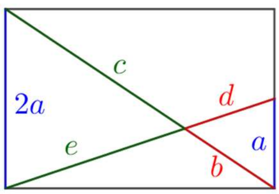
$$t = \frac{M}{c \cdot I} = \frac{0{,}2\text{ g}}{1{,}2\,\frac{\text{g}}{\text{Ah}} \cdot 0{,}6\text{ A}} = \frac{5}{18}\text{ h}$$

Es dauert 16 Minuten und 40 Sekunden.

◀

1.3

a)



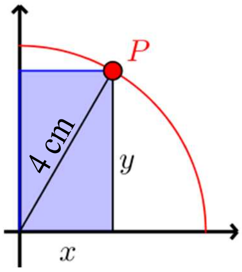
1. Schritt: Die beiden Strecken bilden ein Strahlenpaar. Das gesuchte Teilverhältnis ist $b : c$ bzw. $d : e$.
2. Schritt: Das gesuchte Teilverhältnis kann mit dem Strahlensatz untersucht werden. Es genügt eines der Teilverhältnisse zu untersuchen, da $b : c = d : e$.
3. Schritt: Mit dem Strahlensatz gilt:
$b : c = a : 2a = 1 : 2$.
4. Schritt: Jede der beiden Strecken wird im Verhältnis 1 : 2 geteilt. Zur Überprüfung kann man z.B. vom linken unteren Eckpunkt die zweite Seitenhalbierende in das Rechteck einzeichnen, die die entsprechende Diagonale im selben Verhältnis teilt. Durch die beiden Schnittpunkte wird die Diagonale in drei gleich große Abschnitte zerlegt.

b) **Strategien**: Von Gegebenem ausgehen (Induktion), Skizze anfertigen und in den Kontext eines Strahlenpaars übersetzen (Interpretation).

◄

1.4

a) Bezeichnungen gemäß folgender Skizze



Mit dem Satz des Pythagoras gilt (in cm):

$$y = \sqrt{16 - x^2}$$

Der Umfang U des Rechtecks in Abhängigkeit von x ist

$$U(x) = 2x + 2y = 2x + 2\sqrt{16 - x^2} \text{ mit } x \in \,]0; 4[.$$

Um das lokale Maximum zu bestimmen, wird die Ableitung von U berechnet:

$$U'(x) = 2 - \frac{2x}{\sqrt{16 - x^2}}$$

Für ein lokales Extremum gilt $U'(x) = 0$.

$$U'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\sqrt{2}$$

U hat an den Rändern des Definitionsbereichs die Werte

$$U(0) = U(4) = 8$$

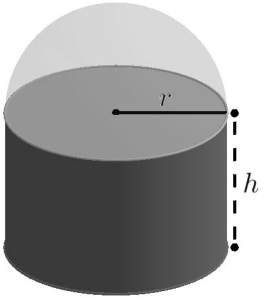
und an der Extremstelle den Wert

$$U(2\sqrt{2}) = 8\sqrt{2} > 8.$$

Also ist der Umfang des Rechtecks maximal für $P(2\sqrt{2} \mid 2\sqrt{2})$.

◄

b) Skizze des Behälters mit dem Grundkreisradius r in m und der Höhe h in m



Volumen des Behälters in m³:

$$V = V_{\text{Zylinder}} + V_{\text{Halbkugel}} = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$V = 5 \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{5}{\pi r^2} - \frac{2}{3} r$$

r und h müssen positiv sein, also:

$$h > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{\pi r^2} - \frac{2}{3} r > 0$$

$$r, h > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < r < \sqrt[3]{\frac{15}{2\pi}}$$

Oberfläche des Behälters in m²

$$O = O_{\text{Boden}} + O_{\text{Mantel}} + O_{\text{Halbkugel}} = \pi r^2 + 2\pi r h + 2\pi r^2,$$

also $\quad O = \pi r\,(3r + 2h)$.

Mit dem oben bestimmten Term für h erhält man O in Abhängigkeit von r:

$$O(r) = \frac{10}{r} + \frac{5}{3}\pi r^2 \quad \text{mit } 0 < r < \sqrt[3]{\frac{15}{2\pi}}$$

Um das lokale Minimum zu berechnen, wird die Ableitung von O berechnet

$$O'(r) = -\frac{10}{r^2} + \frac{10}{3}\pi r.$$

Für das lokale Minimum gilt $O'(r) = 0$

$$O'(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} < \sqrt[3]{\frac{15}{2\pi}}\,.$$

An dieser Stelle hat O den Wert

$$O\left(\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}\right) = 5\,\sqrt[3]{9\pi} \approx 15{,}23.$$

An den Rändern des Definitionsbereichs gilt

$$O(r) \to \infty \ \text{ für } \ r \to 0 \quad \text{und} \quad O(r) \to \approx 16{,}835 \ \text{ für } \ \mathrm{r} \to \sqrt[3]{\frac{15}{2\pi}}\,.$$

Also ist die Oberfläche minimal für $r = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} \approx 0{,}985$.

In diesem Fall ist $h = \frac{5}{\pi r^2} - \frac{2}{3} r = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} = r$.

Höhe und Durchmesser des optimalen Behälters sind gleich groß und zwar ungefähr 0,985 m.

◄