Intervallhalbierungsverfahren

Seitdem elektronische Hilfsmittel zur Verfügung stehen, ist es nur noch selten notwendig, irrationale Zahlen näherungsweise *von Hand* zu berechnen. Dennoch ist es oft nützlich, Verfahren zu kennen, die es möglich machen, solche Zahlen ohne Hilfsmittel zu berechnen. Am häufigsten werden solche Verfahren zum Lösen von Gleichungen, insbesondere zur Berechnung von Nullstellen von Funktionen angewendet. Im folgenden Beispiel wird das Prinzip des Intervallhalbierungsverfahrens erklärt.

Beispiel $\sqrt{2}$ soll von Hand mit vier Nachkommastellen berechnet werden.
Zunächst wird ein erstes Intervall angegeben, in dem der Näherungswert liegt:

$$\sqrt{2} \in \,]1;\, 2[\text{, da } 1 < 2 < 2^2 = 4$$

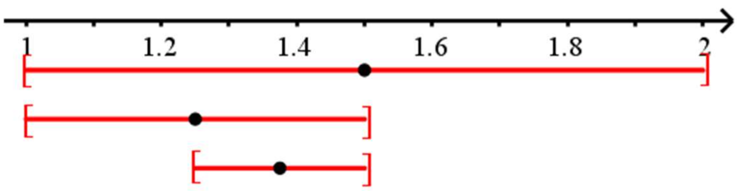
Die Mitte dieses Intervalls ist der erste Näherungswert, also $\sqrt{2} \approx 1{,}5$.
Nun wird das Intervall halbiert und untersucht, in welchem der beiden Teilintervalle der gesuchte Wert liegt:

$$\sqrt{2} \in \,]1;\, 1{,}5[\text{, da } 1 < 2 < 1{,}5^2 = 2{,}25$$

Die Mitte dieses neuen Intervalls ist der zweite Näherungswert, also $\sqrt{2} \approx 1{,}25$.
In den weiteren Näherungsschritten wird jedes Mal das neue Intervall halbiert und wieder das Teilintervall bestimmt, in dem der gesuchte Näherungswert liegt. Die Mitte dieses Intervalls ist der nächste Näherungswert. Diese Schritte werden solange wiederholt, bis der Näherungswert die angestrebte Genauigkeit hat, im Beispiel vier Nachkommastellen.

$$\sqrt{2} \in \,]1{,}25;\, 1{,}5[\text{, da } 1{,}25^2 = 1{,}5625 < 2 < 1{,}5^2 = 2{,}25$$

Der dritte Näherungswert ist $\sqrt{2} \approx 1{,}375$.
Die Abbildung macht die ersten drei Schritte deutlich.



Die Ergebnisse der nächsten zehn Näherungsschritte sind in der Tabelle angegeben:

	Intervall	Näherungswert		Intervall	Näherungswert
4.	[1,3750; 1,5000]	1,43750	9.	[1,4141; 1,4180]	1,41602
5.	[1,3750; 1,4375]	1,40625	10.	[1,4141; 1,4160]	1,41504
6.	[1,4063; 1,4375]	1,42188	11.	[1,4141; 1,4150]	1,41455
7.	[1,4063; 1,4219]	1,41406	12.	[1,4141; 1,4146]	1,41431
8.	[1,4141; 1,4219]	1,41797	13.	[1,4141; 1,4143]	1,41418

Der gesuchte Näherungswert ist $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$. ◄

Das Beispiel zeigt, dass man beim Intervallhalbierungsverfahren häufig sehr viele Schritte durchführen muss, um einen Näherungswert mit vorgegebener Genauigkeit zu erhalten. Selbst wenn man in dem Beispiel nur zwei Nachkommastellen berechnen wollte, wären dafür elf Näherungsschritte notwendig, bei drei Nachkommastellen sind es genau wie für vier dreizehn Schritte. Abhilfe kann ein modifiziertes Intervallteilungsverfahren schaffen, bei dem die Ergebnisse der aktuellen Überprüfung bei der Teilung des Intervalls berücksichtigt werden.
So ist es beim obigen Beispiel sinnvoller, im 2. Schritt das Intervall]1; 1,5[nicht zu halbieren, sondern als neues Teilintervall]1,4; 1,5[festzulegen:

$$\sqrt{2} \in \;]1{,}4;\ 1{,}5[, \text{ da } 1{,}4^2 = 1{,}96 < 2 < 1{,}5^2 = 2{,}25$$

Damit ist der zweite Näherungswert bereits $\sqrt{2} \approx 1{,}4$.

Im Vergleich zu schnelleren Verfahren ist das Intervallhalbierungsverfahren sehr stabil und garantiert das Finden aller Lösungen mit einer vorgegebenen Genauigkeit.

Aufgabe

a) Berechnen Sie mit dem Intervallhalbierungsverfahren die Nullstelle der Funktion f mit

$$f(x) = x^3 + 3x - 1$$

auf drei Nachkommastellen gerundet.

b) Berechnen Sie mit dem Intervallteilungsverfahren auf drei Nachkommastellen gerundet die Lösung der Gleichung

$$2^x = x^2,$$

die im Intervall]–1; 0[liegt.

Lösungen

a) Zunächst bestimmt man ein Intervall, das die gesuchte Nullstelle enthält: Im Beispiel gilt $f(0) = -1$ und $f(1) = 3$. Die Nullstelle liegt also im Intervall]0; 1[.

Mit dem Intervallhalbierungsverfahren erhält man dann nacheinander die Näherungswerte: 0,5; 0,25; 0,375; 0,3125; 0,3438; 0,3281; 0,3203; 0,3242; 0,3223; 0,3213; 0,3218; 0,3220.
Die Nullstelle ist etwa 0,322.

◀

b) Näherungswerte (zum Beispiel): –0,7; –0,77; –0,767; –0,7667.
Die Lösung ist $x \approx -0{,}767$.

◀